



Rozwiązania zadań 17, 18 i 19.

Niech $P = (x, y, z)$ będzie punktem na sferze $S^2(r)$ różnym od bieguna północnego $N = (0, 0, r)$. Niech $P' = (u, v, -r) = (u, v)$ będzie jego rzutem na płaszczyznę H o równaniu $z = -r$ (którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$).

Najpierw chcemy wyrazić współrzędne punktu P' w zależności od współrzędnych punktu P . Zauważmy, że punkt P' jest punktem przecięcia prostej NP z płaszczyzną H . Prosta NP dana jest w postaci parametrycznej jako

$$NP: N + \alpha \cdot \overrightarrow{NP}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

gdzie $\overrightarrow{NP} = (x, y, z - r)$. Równoważnie

$$NP: (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, r + \alpha \cdot (z - r)), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Interesuje nas wartość parametru α , dla której ostatnia współrzędna jest równa $-r$, czyli

$$\alpha = \frac{2r}{r - z}.$$

Podstawiając do wzoru na pierwszą i drugą współrzędną otrzymujemy

$$u = \frac{2r}{r - z} \cdot x \quad \text{ i } \quad v = \frac{2r}{r - z} \cdot y.$$

Odwzorowanie π_N jest regularne, bo składowe są funkcjami wymiernymi i dla wszystkich punktów na sferze poza N mamy $r - z \neq 0$.

Analogicznie wyliczamy, że dla rzutowania π_S z bieguna południowego współrzędne wyrażają się następująco:

$$\pi_S(P) = (u, v) = \left(\frac{2r}{r + z} \cdot x, \frac{2r}{r + z} \cdot y \right).$$

Przekształcenie odwrotne do π_N , wyliczamy analogicznie. Niech $P' = (u, v, -r)$, chcemy obliczyć współrzędne punktu P . Prosta NP' dana jest w postaci parametrycznej jako

$$NP: N + \lambda \cdot \overrightarrow{NP'}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

gdzie $\overrightarrow{NP'} = (u, v, -2r)$. Równoważnie

$$NP: (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v, r - 2\lambda \cdot r), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Interesuje nas wartość parametru λ , dla której punkt na prostej leży na sferze. Takie wartości są dwie, jedna z nich to, oczywiście, $\lambda = 0$, co odpowiada punktowi N . Nas interesuje różna od zera wartość λ . Wyliczamy ją, wstawiając parametryzację prostej NP' do równania sfery $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Mamy

$$\lambda = \frac{4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}.$$

Zatem współrzędne punktu P to

$$P = \left(\frac{4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}u, \frac{4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}v, \frac{u^2 + v^2 - 4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}r \right).$$

To odwzorowanie jest regularne, bo składowe są funkcjami wymiernymi, a mianowniki nie mają rzeczywistych miejsc zerowych.

Złożenie $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ jest określone dla wszystkich (u, v) poza początkiem układu współrzędnych i mamy

$$\begin{aligned} \pi_S \circ \pi_N^{-1}(u, v) &= \pi_S \left(\frac{4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}u, \frac{4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}v, \frac{u^2 + v^2 - 4r^2}{u^2 + v^2 + 4r^2}r \right) = \\ &= \left(\frac{4r^2}{u^2 + v^2} \cdot u, \frac{4r^2}{u^2 + v^2} \cdot v \right). \end{aligned}$$

A zatem złożenie $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ jest inwersją względem okręgu o promieniu $2r$, który jest obrazem równika w rzucie π_N (i π_S też).