

Vasyl Fedorcuk, Tomasz Szemberg

## Równania różniczkowe, semestr zimowy 2011/12

Zestaw ćwiczeń 6, na dzień 25 listopada 2011

**Zadanie 21** Uzasadnij, że funkcje

$$y_1(t) = \exp(\lambda_1 t), \quad y_2(t) = \exp(\lambda_2 t),$$

tworzą układ fundamentalny na  $\mathbb{R}$  dla równania jednorodnego ze stałymi współczynnikami  $p, q \in \mathbb{R}$

$$y'' + py' + qy = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lambda_1, \lambda_2$  są różnymi pierwiastkami wielomianu

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

**Zadanie 22** Sprawdź, że funkcje  $\varphi(t) = \exp(-t)$  i  $\psi(t) = \exp(3t)$  oraz ich dowolne kombinacje liniowe są rozwiązaniami równania

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

**Zadanie 23** Niech  $y_1(t), y_2(t)$  będą rozwiązaniami równania jednorodnego

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

na przedziale  $(a, b)$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$  będzie punktem z tego przedziału. Udowodnij, że dla dowolnego  $t \in (a, b)$  z przedziału zachodzi równość

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right),$$

gdzie  $W(t) = W(y_1(t), y_2(t))$  jest wronskianem.

Fakt ten nosi nazwę *wzoru Liouville'a*.

**Zadanie 24** Podane funkcje  $\varphi(t)$  są znanymi rozwiązaniami odpowiednich równań. Wykorzystując metodę obniżania rzędu równania, wyznacz ogólne rozwiązania równań:

- $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad \varphi(t) = \exp(3t),$
- $y'' + 4y = 0, \quad \varphi(t) = \cos(2t),$
- $t^2 y'' + \frac{y}{4} = 0, \quad \varphi(t) = \sqrt{t}.$