

89. Znaleźć $[X_1, X_2]$, $[X_1, X_3]$ oraz $[X_2, X_3]$ dla $X_1 = \partial_u$, $X_2 = u \partial_u + v \partial_v$ i $X_3 = (u^2 - v^2) \partial_u + 2uv \partial_v$.

Inne oznaczenie dla współrzędnych krzywoliniowych: $u = u^1$, $v = u^2$. Niech dla $i \in \{1, 2\}$ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$.

Symbole Christoffela drugiego rodzaju zdefiniowane są przez równości: $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

Symbole Christoffela pierwszego rodzaju: $\Gamma_{ijk} = \sum_s \Gamma_{ij}^s g_{sk}$, gdzie $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, czyli $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ oraz $g_{22} = G$.

90. Niech t będzie polem tensorowym typu $(0, 2)$. Niech $t_{ij} = t(\partial_i, \partial_j)$. Znaleźć współrzędne pola tensorowego $\nabla_{\partial_k} t$ (to znaczy funkcje $(\nabla_{\partial_k} t)(\partial_i, \partial_j)$).

91. Niech t będzie polem tensorowym typu $(1, 1)$. Niech $t(\partial_i) = \sum_j t_i^j \partial_j$. Znaleźć funkcje $t_{i;k}^j$ takie, że $(\nabla_{\partial_k} t)(\partial_i) = \sum_j t_{i;k}^j \partial_j$.

92. *Koneksja Levi-Civita* (dla danego tensora metrycznego g) – czyli jedyna koneksja liniowa bez torsji taka, że $\nabla g = 0$ – określona będzie na najbliższym wykładzie przez warunek:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left\{ X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) \right\}$$

Korzystając z powyższego warunku znaleźć symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju dla tej koneksji. Wyrazy macierzy odwrotnej do macierzy (g_{ij}) oznacza się tradycyjnie przez g^{ij} .

Operator kształtu S jest polem tensorowym typu $(1, 1)$ na powierzchni M , a więc dla każdego $p \in M$ określone jest odwzorowanie liniowe $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$. Wyznacznik tego odwzorowania (czyli wyznacznik macierzy tego odwzorowania w dowolnie wybranej bazie przestrzeni wektorowej $T_p M$) nazywamy *krzywizną Gaussa* powierzchni M w punkcie p : $\kappa(p) = \det S_p$.

93. Udowodnić, że

$$\kappa = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}}{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}},$$

gdzie $h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j)$ a g_{ij} jest takie jak poprzednio.

Przy innych oznaczeniach, gdy

$$g = E du \otimes du + F (du \otimes dv + dv \otimes du) + G dv \otimes dv,$$

$$h = l du \otimes du + m (du \otimes dv + dv \otimes du) + n dv \otimes dv,$$

mamy

$$\kappa = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

Wskazówka: niech $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = h_{ij}$, $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = S_i^j$ oraz $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = g_{ij}$. Korzystając ze związku $h(X, Y) = g(SX, Y)$ sprawdzić, że $A = BC$, a potem skorzystać z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu macierzy.

94. (*Gaussa theorem egregium*) Niech X, Y będą takimi polami, że X_p i Y_p są liniowo niezależne. Sprawdzić, że

$$\kappa(p) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(X, Y)}(p).$$

Wskazówka: skorzystać z równania Gaussa.

95. Sprawdzić, że sfera, cylinder obrotowy i pseudosfera są powierzchniami o stałej krzywiznie Gaussa.

96. Znaleźć krzywiznę Gaussa dla torusa $\mathbf{r}(u, v) = ((a \cos u + b) \cos v, (a \cos u + b) \sin v, a \sin u)$.

97. *Krzywizną średnią* powierzchni w punkcie p nazywamy liczbę $H_p := \frac{1}{2} \text{tr } S_p$. Sprawdzić, że

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)},$$

gdzie E, F, G, l, m, n to współczynniki pierwszej i drugiej formy podstawowej powierzchni.

Wskazówka: skorzystać znów ze związku $A = BC$ – należy wyliczyć $\frac{1}{2} \text{tr } B$.

98. Powierzchnia nazywa się *powierzchnią minimalną*, jeśli krzywizna średnia H jest stale równa 0. Sprawdzić, że powierzchnia śrubowa $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ i powierzchnia Ennepera $\mathbf{r}(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2)$ są powierzchniami minimalnymi.