

78. Znaleźć koneksję ∇ i drugą formę podstawową dla sfery o promieniu r . Użyć współrzędnych geograficznych, związanych z parametryzacją $\mathbf{r}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$. Sprawdzić, że $\frac{1}{r} \mathbf{r}(u, v)$ i $-\frac{1}{r} \mathbf{r}(u, v)$ są wektorami prostopadłymi do powierzchni w punkcie o współrzędnych (u, v) i że mają długość jednostkową. Do liczenia ∇ i h użyć $\mathbf{N} = -\frac{1}{r} \mathbf{r}(u, v)$.
79. Znaleźć koneksję ∇ i drugą formę podstawową dla cylindra obrotowego $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Jako pole normalne wybrać to zwrócone do wewnątrz.
80. *Traktrysa* jest krzywą o równaniu parametrycznym

$$x(t) = a \cos t + a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|, \quad y(t) = a \sin t, \quad t \in (0, \pi).$$

- (i) Napisać równanie stycznej do tej krzywej w punkcie $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ dla $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- (ii) Znaleźć punkt P_1 przecięcia tej stycznej z osią Ox .
- (iii) Sprawdzić, że odległość punktów P_0 i P_1 nie zależy od punktu P_0 .
- (iv) Naszkicować tę krzywą albo obejrzyć odpowiedni rysunek w jakiejś książce.
81. *Pseudosfera*. Napisać równanie powierzchni obrotowej, którą otrzymamy obracając wokół osi Oz traktryse

$$t \mapsto \left(a \sin t, 0, a \cos t + a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right).$$

Znaleźć pierwszą i drugą formę podstawową tej powierzchni oraz koneksję ∇ .

82. Znaleźć $X(f)$ dla $X = 2u \cos v \frac{\partial}{\partial u} + e^v \frac{\partial}{\partial v}$ oraz $f(u, v) = u^2 + 5v^3$.
83. Dla pól wektorowych $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ definiujemy operator $\Lambda : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, $\Lambda(f) := X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$. Sprawdzić, że Λ spełnia warunki $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$ oraz $\Lambda(f_1 \cdot f_2) = \Lambda(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot \Lambda(f_2)$ dla dowolnych $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
84. Porównując działanie lewej i prawej strony każdej z równości na dowolną funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ udowodnić, że nawias $[\cdot, \cdot]$ spełnia następujące warunki:
- (i) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), [Y, X] = -[X, Y]$,
- (ii) $\forall X_1, X_2, Y \in \mathcal{X}(M), [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$,
- (iii) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall a \in \mathbf{R}, [aX, Y] = a[X, Y]$,
- (iv) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (*tożsamość Jacobiego*).
85. Sprawdzić, że dla $X, Y \in \mathcal{X}(M), f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$.
86. *Tensorom torsji* koneksji liniowej ∇ nazywamy odwzorowanie

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (X, Y) \mapsto T(X, Y) \in \mathcal{X}(M),$$

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Sprawdzić, że T jest polem tensorowym typu $(1, 2)$.

87. *Tensorom krzywizny* koneksji liniowej ∇ nazywamy odwzorowanie

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathcal{X}(M),$$

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Sprawdzić, że R jest polem tensorowym typu $(1, 3)$.

88. Policzyc $R(\partial_u, \partial_v)\partial_u$ oraz $R(\partial_u, \partial_v)\partial_v$ dla koneksji z zadań 78, 79 i 81.