

- 72.** *Siatkę Czebyszewa* nazywamy taką siatkę krzywych położonych na powierzchni, że przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie krzywe siatki, a długości przeciwległych boków każdego utworzonego przez nie krzywoliniowego czworoboku są sobie równe. [ M. Biernacki, Geometria różniczkowa, część druga, PWN Warszawa 1955, str. 33]. Udowodnić, że na powierzchni regularnej linie parametrów  $u$  i  $v$  (czyli krzywe  $v = \text{const}$  i  $u = \text{const}$ ) tworzą siatkę Czebyszewa wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsza forma podstawowa ma w tych współrzędnych  $u, v$  postać

$$E(u) du \otimes du + F(u, v) (du \otimes dv + dv \otimes du) + G(v) dv \otimes dv.$$

- 73.** Zakładamy, że dla parametryzacji  $\mathbf{r} : D \rightarrow M \cap V$  linie parametrów  $u$  i  $v$  tworzą siatkę Czebyszewa. Na  $M \cap V$  wprowadzamy nowe współrzędne  $\xi, \eta$  w następujący sposób. Ustalamy  $(u_0, v_0) \in D$ . Punktowi o współrzędnych krzywoliniowych  $(u, v)$  przyporządkowujemy  $\xi := (\text{długość krzywej } v = v_0 \text{ od } \mathbf{r}(u_0, v_0) \text{ do } \mathbf{r}(u, v_0))$ ,  $\eta := (\text{długość krzywej } u = u_0 \text{ od } \mathbf{r}(u_0, v_0) \text{ do } \mathbf{r}(u_0, v))$ . Widać, że  $\xi$  zależy tylko od  $u$ , a  $\eta$  zależy tylko od  $v$ . Jaką postać ma pierwsza forma podstawowa we współrzędnych  $\xi, \eta$ ? Jak można zinterpretować współczynnik  $\tilde{F}$ ? Sprawdzić, że linie parametru  $\xi$  pokrywają się z liniami parametru  $u$ , a linie parametru  $\eta$  pokrywają się z liniami parametru  $v$ , oraz że  $\xi, \eta$  są parametrami łukowymi dla wszystkich linii z powyższych dwóch rodzin ( $\xi$  dla linii parametru  $\xi$ ,  $\eta$  dla linii parametru  $\eta$ ).
- 74.** Pierwsza forma podstawowa pewnej powierzchni we współrzędnych  $u, v$  dana jest wzorem  $du \otimes du + (u^2 + a^2) dv \otimes dv$ . Obliczyć długości boków, cosinusy kątów wewnętrznych i pole trójkąta krzywoliniowego, ograniczonego przez krzywe opisane odpowiednio równaniami  $u = av$ ,  $u = -av$  oraz  $v = 1$ .
- 75.** Obliczyć pole powierzchni torusa (por. zadanie 23).
- 76.** Obliczyć pole powierzchni sfery o promieniu  $r$ .
- 77.** *Twierdzenie Pappusa.* Niech  $M$  będzie powierzchnią obrotową utworzoną w wyniku obrotu dookoła osi  $Oz$  krzywej  $s \mapsto (\alpha(s), 0, \beta(s))$  i niech  $s$  będzie dla tej krzywej parametrem łukowym. Niech  $\rho(s)$  oznacza odległość punktu  $(\alpha(s), 0, \beta(s))$  od osi  $Oz$ . Udowodnić, że pole powierzchni  $M$  wynosi  $2\pi \int_0^l \rho(s) ds$ , gdzie  $l$  jest długością obracanej krzywej.