

67. Niech $\mathbf{r} : D \ni (u, v) \mapsto M \cap V$ będzie parametryzacją, a $\varphi : \tilde{D} \ni (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) \in D$ dyfeomorfizmem. Niech E, F, G będą współczynnikami pierwszej formy podstawowej we współrzędnych krzywoliniowych (u, v) związanych z parametryzacją $\mathbf{r}$, a $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ współczynnikami pierwszej formy podstawowej we współrzędnych krzywoliniowych $(\tilde{u}, \tilde{v})$ związanych z parametryzacją $\mathbf{r} \circ \varphi$.

(a) Sprawdzić, że

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

Współczynniki $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ oraz pochodne cząstkowe są liczone w punkcie $(\tilde{u}, \tilde{v})$, a E, F, G w punkcie $(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$. Litera T oznacza transponowanie macierzy.

(b) Sprawdzić, że $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ możemy otrzymać jako współczynniki przy $d\tilde{u} \otimes d\tilde{u}, d\tilde{u} \otimes d\tilde{v} + d\tilde{v} \otimes d\tilde{u}, d\tilde{v} \otimes d\tilde{v}$ odpowiednio, gdy do $E du \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + G dv \otimes dv$ podstawimy $du = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v}$ i $dv = \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v}$.

68. (a) Napisać pierwszą formę podstawową we współrzędnych krzywoliniowych (u, v) związanych z parametryzacją

$$\mathbf{r}(u, v) = (au \cos v, au \sin v, bu), \quad 0 < u < 1, \quad -\pi < v < \pi$$

powierzchni stożka.

(b) Znaleźć współrzędne (ξ, η) , w których ta forma będzie miała (z dokładnością do stałego czynnika) taką samą postać, jak standardowy iloczyn skalarny na płaszczyźnie (czyli $K^2(d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta)$, K - stała dodatnia). Można to zrobić następującą metodą. Obrazem parametryzacji $\mathbf{r}$ jest cała powierzchnia stożka bez jednej tworzącej. Rozciętą powierzchnię stożka możemy, nie zmieniając mierzonej na powierzchni odległości punktów, rozłożyć na płaszczyźnie (na przykład tak, by tworząca $v = 0$ miała kierunek osi odciętych). Na płaszczyźnie otrzymujemy w ten sposób wycinek koła. Niech $\xi(u, v)$ i $\eta(u, v)$ będą współrzędnymi kartezjańskimi punktu o współrzędnych krzywoliniowych (u, v) po takim rozwinięciu rozciętego stożka na płaszczyźnie. Korzystając z zadania 67 (b) wyrazić $d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta$ przez du, dv i porównać otrzymany wynik z wyliczoną w punkcie (a) pierwszą formą podstawową.

69. Niech A i B będą punktami powierzchni z zadania 68 o współrzędnych krzywoliniowych $u = \frac{1}{2}, v = -\frac{\pi}{2}$ oraz $u = \frac{1}{2}, v = \frac{\pi}{2}$ odpowiednio.

(a) Obliczyć długość drogi jaką trzeba przebyć poruszając się od A do B wzdłuż równoleżnika $u = \frac{1}{2}$.

(b) Korzystając z zadania 68 (b) opisać (niekoniecznie wzorami) najkrótszą drogę - na powierzchni - od A do B i znaleźć długość tej drogi. Sprawdzić, że długość drogi z punktu (a) jest większa od tej liczby.

(c) Porównać długość drogi z punktu (b) z odległością punktów A i B w $\mathbf{R}^3$.

Wskazówka. Jeśli tensor metryczny ma postać $d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta$, to na długość krzywej otrzymujemy taki sam wzór, jak na płaszczyźnie euklidesowej o współrzędnych ξ i η . Dlatego najkrótszą krzywą łączącą punkty (ξ_1, η_1) i (ξ_2, η_2) jest krzywa odpowiadająca odcinkowi linii prostej: $[0, 1] \ni t \mapsto (\xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1), \eta_1 + t(\eta_2 - \eta_1)) \in \tilde{D}$. Długość tego odcinka $\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}$ jest odległością punktów $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$. Dla tensora metrycznego $K^2(d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta)$ otrzymamy $K(\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2})$.

70. Niech pierwszą formą podstawową będzie $g = E du \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + G dv \otimes dv$ i niech $\psi = P du \otimes du + Q(du \otimes dv + dv \otimes du) + R dv \otimes dv$. Zakładamy, że $PR - Q^2 < 0$. Wszystko rozważamy w ustalonej przestrzeni stycznej $T_p M$, ale w celu uproszczenia zapisu będziemy pisać du, dv zamiast $du|_p, dv|_p$.

(a) W przypadku $P \neq 0$ niech λ_1 i λ_2 będą pierwiastkami wielomianu $P\lambda^2 + 2Q\lambda + R$. Sprawdzić, że ψ możemy otrzymać, dokonując symetryzacji odwzorowania dwuliniowego $\varphi = P(du - \lambda_1 dv) \otimes (du - \lambda_2 dv)$, tzn., że $\psi(X, Y) = \frac{1}{2}(\varphi(X, Y) + \varphi(Y, X))$. Wykorzystując ten fakt sprawdzić że zbiór $\{X \in T_p M : \psi(X, X) = 0\}$ jest sumą mnogościową dwóch prostych. W jednym z kolejnych punktów zadania będą potrzebne wektory kierunkowe tych prostych.

(b) W przypadku $R \neq 0$ wykorzystać w podobny sposób pierwiastki μ_1, μ_2 wielomianu $R\mu^2 + 2Q\mu + P$. Jaki jest związek między λ_1, λ_2 i μ_1, μ_2 w przypadku $P \neq 0$ i $R \neq 0$?

(c) Rozważyć przypadek $P = 0$ i $R = 0$ - też opisać zbiór $\{X \in T_p M : \psi(X, X) = 0\}$.

(d) Udowodnić, że proste, których sumą jest $\{X \in T_p M : \psi(X, X) = 0\}$ są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $ER - 2FQ + GP = 0$.

71. Wyznaczyć cosinus kąta między krzywymi $x = x_0$ i $y = y_0$ na powierzchni $(x, y) \mapsto (x, y, axy)$.