

Baza V^* dualna do danej bazy przestrzeni wektorowej V

51. Niech V będzie dwuwymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbf{R}$, a wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ niech tworzą bazę tej przestrzeni. Niech ω^1, ω^2 będzie bazą przestrzeni wektorowej V^* (przestrzeni wektorowej odwzorowań liniowych z V do $\mathbf{R}$) dualną do bazy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (czyli $\omega^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$). Znaleźć wartość odwzorowania liniowego $\lambda = 2\omega^1 - 3\omega^2$ na wektorze $\mathbf{v} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$.
52. Oznaczenia jak w zadaniu poprzednim. Niech $\lambda : V \rightarrow \mathbf{R}$ będzie odwzorowaniem liniowym takim, że $\lambda(\mathbf{e}_1) = 4$, $\lambda(\mathbf{e}_2) = 6$. Zapisać λ jako kombinację liniową odwzorowań ω^1 i ω^2 .
53. Niech V będzie zbiorem wszystkich kombinacji liniowych funkcji $f_1(x) = \sin x$ i $f_2(x) = \cos x$ o współczynnikach rzeczywistych. Jest to dwuwymiarowa przestrzeń wektorowa nad $\mathbf{R}$. Niech ω^1, ω^2 będzie bazą przestrzeni V^* dualną do bazy f_1, f_2 przestrzeni V . Odwzorowanie liniowe $\lambda : V \ni f \mapsto f\left(\frac{\pi}{3}\right) \in \mathbf{R}$ zapisać w postaci kombinacji liniowej ω^1 i ω^2 .

Różniczkowanie funkcji określonej na powierzchni

54. Niech M będzie torusem opisanym równaniem parametrycznym

$$\mathbf{r}(u, v) = ((a \cos u + b) \cos v, (a \cos u + b) \sin v, a \sin u), \quad 0 < a < b.$$

(Możemy dobrać stosowną ilość obszarów D_i , tak, żeby obrazy parametryzacji opisanych tym wzorem pokryły cały torus.)

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ zdefiniowana jest następująco:

$$f(p) := \text{odległość punktu } p \text{ od płaszczyzny } y = -a - b.$$

Sprawdzić, że funkcja f jest różniczkowalna. Zapisać 1-formę df w bazie du, dv . Znaleźć punkty krytyczne funkcji f (takie punkty $p \in M$, dla których $d_p f = 0$).

55. Na powierzchni śrubowej

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

zadana jest funkcja

$$f(p) := \text{kwadrat odległości punktu } p \text{ od prostej } x = 1, y = 2.$$

Sprawdzić, że f jest funkcją różniczkowalną. Zapisać df w bazie du, dv . Policzyc $d_p f$ na wektorze $\frac{d\gamma}{dt}(0)$ dla

$$\gamma(t) = \left((1+t+t^3) \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2t\right), (1+t+t^3) \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2t\right), b\left(\frac{1}{2}\pi + 2t\right) \right), \quad p = \left(0, 1, \frac{1}{2}b\pi\right).$$

56. Dla wybranej parametryzacji $\mathbf{r}$ podzbioru otwartego sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ napisać wzór na złożenie $f \circ \mathbf{r}$, gdzie $f(p) := \text{kwadrat odległości punktu } p \text{ od punktu } p_2 = (0, 0, 2)$. Sprawdzić, że $d_p f = 2\langle \cdot, \overline{p_2 p} \rangle$.

Iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych prowadzących z V w $\mathbf{R}$.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbf{R}$, a V^* przestrzenią wektorową odwzorowań liniowych z V w $\mathbf{R}$. Dla $\alpha, \beta \in V^*$ definiujemy odwzorowanie dwuliniowe $\alpha \otimes \beta : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ następująco: $\alpha \otimes \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{w})$.

57. Niech ω^1, ω^2 będzie bazą V^* dualną do bazy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ w V . Dla $\alpha = \omega^1 - 3\omega^2$, $\beta = 2\omega^1 + 5\omega^2$ policzyć $\alpha \otimes \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)$, $\alpha \otimes \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\alpha \otimes \beta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ i $\alpha \otimes \beta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$.
58. Oznaczenia jak w zadaniu poprzednim. Dane jest odwzorowanie dwuliniowe $\phi = \omega^1 \otimes \omega^1 + \mu(\omega^1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^1) + \omega^2 \otimes \omega^2$. Dla jakich wartości $\mu \in \mathbf{R}$ odwzorowanie ϕ jest dodatnio określone? Dla jakich wartości μ jest *niezdegenerowane*? (tzn. kiedy dla każdego $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ istnieje $\mathbf{w}$ taki, że $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$).
59. Niech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbf{R}^3$, a $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ dualną do niej bazą w $(\mathbf{R}^3)^*$. Przedstawić standardowy iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^3$ jako kombinację liniową odwzorowań $\omega^i \otimes \omega^j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
60. Pokazać na przykładzie, że jeśli $\dim V > 1$, to istnieją odwzorowania dwuliniowe $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, których nie da się zapisać w postaci jednego iloczynu $\alpha \otimes \beta$. Wskazówka: czy istnieje wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ taki, że dla wszystkich $\mathbf{w}$ jest $\alpha \otimes \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$?