

37. Jak wyglądają linie parametrów u i v dla parametryzacji pojawiających się w zadaniach 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26 i 28?

Przypomnienie z geometrii analitycznej

38. Napisać równanie przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ płaszczyzny Π prostopadłej do wektora $\mathbf{N} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$. Równanie to podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by punkt $P = (x, y, z)$ należał do Π . Posługując się iloczynem skalarnym i wprowadzając wektor $\mathbf{r}_0 := \overrightarrow{OP_0}$, $O = (0, 0, 0)$, zapisać to równanie jako warunek na wektor $\mathbf{R} := \overrightarrow{OP}$. Jakim warunkiem można opisać zbiór wszystkich punktów leżących po tej stronie płaszczyzny Π , w którą zwrócony jest wektor $\mathbf{N}$? A jakim warunkiem zbiór punktów leżących po przeciwnej stronie?
39. Napisać wzór na odległość punktu $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ od płaszczyzny Π z poprzedniego zadania. Zapisać ten wzór w postaci wektorowej, używając iloczynu skalarnego i wektorów $\mathbf{N}$, $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{r}_1 := \overrightarrow{OP_1}$. Jaki wzór otrzymamy, jeśli dodatkowo założymy, że $|\mathbf{N}| = 1$?
40. Napisać równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do podprzestrzeni w $\mathbf{R}^3$ generowanej przez dwa liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Napisać równanie tej płaszczyzny w postaci wektorowej, używając iloczynu mieszanego i wektorów $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ oraz $\mathbf{R}$. Wskazówka: zadanie 5 lub zadania 6, 38 i definicja iloczynu mieszanego.

Płaszczyzna styczna do powierzchni M w punkcie p

$T_p M := \{ \frac{d\gamma}{dt}(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ jest różniczkowalne, } \gamma(0) = p \text{ i } \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \gamma(t) \in M \}$

$T_p M$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbf{R}^3$.

$\Pi_p :=$ przechodząca przez punkt p płaszczyzna równoległa do $T_p M$.

W poniższych zadaniach, tam gdzie mowa jest o płaszczyźnie stycznej w punkcie p do powierzchni, chodzi o płaszczyznę Π_p .

41. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, 3, 4)$ do powierzchni zadanej przy pomocy parametryzacji $\mathbf{r}(u, v) = (u, u^2 - 2v, u^3 - 3uv)$.
42. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 169$ w punkcie $(3, 2, 4)$.
43. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
44. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do hiperboloidy jednopowłokowej $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
45. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do hiperboloidy dwupowłokowej $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
46. Sprawdzić, że wszystkie płaszczyzny styczne do powierzchni z zadania 32 przechodzą przez punkt $(0, 0, 0)$.
47. Zbadać, czy płaszczyzna styczna do powierzchni M w punkcie p ma z powierzchnią M punkty wspólne różne od punktu p :
- $M : 3x^2 + 4y^2 - z = 0, \quad p = (1, -1, 7),$
 - $M : x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, \quad p = (1, 2, 3),$
 - $M : z = (x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2), \quad p = (1, 0, 1).$

Wektor normalny do powierzchni

48. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni $xy^2 + z^3 - 12 = 0$ w punkcie $(1, 2, 2)$.
49. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni śrubowej $\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, av) \in \mathbf{R}^3$, gdzie $a > 0$, w punkcie p odpowiadającym wartościom $u = 1, v = \frac{\pi}{4}$.
50. Sprawdzić, że trzy powierzchnie z punktu b) zadania 31 są do siebie w punkcie p_0 wzajemnie prostopadłe (tzn. sprawdzić, że wektory prostopadłe do tych powierzchni w punkcie p_0 są parami ortogonalne). Wskazówka: przyda się równość, którą otrzymamy odejmując stronami równania $F_{\lambda_i}(x_0, y_0, z_0) = 1$ i $F_{\lambda_j}(x_0, y_0, z_0) = 1$ przy $\lambda_i \neq \lambda_j$.