

Rzut stereograficzny.

17. Napisać wzory na zależność (u, v) od (x, y, z) w rzutowaniu stereograficznym π_N ze sfery $S^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ z wyrzuconym biegunem $N = (0, 0, r)$ na płaszczyznę $z = -r$ styczną do sfery $S^2(r)$ w punkcie $S = (0, 0, -r)$ (którą utożsamiamy z $\mathbf{R}^2$ przez rzutowanie $(u, v, -r) \mapsto (u, v)$). Sprawdzić, że to odwzorowanie jest bijekcją i napisać wzór na odwzorowanie odwrotne. Sprawdzić, czy to odwzorowanie odwrotne jako odwzorowanie $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ jest regularne. (Przy szukaniu odwzorowania odwrotnego można najpierw zauważyć, że $u^2 + v^2$ zależy tylko od z i wyrazić z przez u, v .)

18. Zrobić to samo dla rzutowania π_S ze zbioru $S^2(r) \setminus \{S\}$ na płaszczyznę $z = r$.

19. Znaleźć zbiór $\pi_N(S^2(r) \setminus \{N, S\}) \subset \mathbf{R}^2$ i zapisać we współrzędnych u, v odwzorowanie

$$\pi_S \circ (\pi_N)^{-1} : \pi_N(S^2(r) \setminus \{N, S\}) \rightarrow \pi_S(S^2(r) \setminus \{N, S\}).$$

Odwzorowania regularne i parametryzacja

20. Wykres funkcji. Niech $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Sprawdzić, że regularne jest odwzorowanie

$$\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \in \mathbf{R}^3$$

Parametryzację płata powierzchni, która ma postać $(x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y))$ nazywamy parametryzacją Monge'a.

21. Powierzchnia siodłowa $z = xy$.

(i) Narysować na płaszczyźnie niektóre poziomicę funkcji $\varphi(x, y) = xy$. Wywnioskować z tego, jak wygląda ta powierzchnia.

(ii) Napisać równanie tej powierzchni w układzie $x'y'z'$, gdzie $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $z' = z$ (układ ten otrzymamy, gdy obrócimy wyjściowy układ o kąt 45° wokół osi z). Czym są przekroje tej powierzchni płaszczyznami $x' = \text{const}$, czym są przekroje płaszczyznami $y' = \text{const}$?

22. Powierzchnia obrotowa. Dana jest krzywa $I \ni u \mapsto (\alpha(u), 0, \beta(u)) \in \mathbf{R}^3$ leżąca w płaszczyźnie $y = 0$; I jest przedziałem otwartym w $\mathbf{R}$. Zakładamy, że dla każdego u , $(\alpha'(u))^2 + (\beta'(u))^2 > 0$ oraz $\alpha(u) > 0$. Napisać równanie parametryczne powierzchni, którą otrzymamy obracając zbiór $\{(\alpha(u), 0, \beta(u)) : u \in I\}$ wokół osi Oz . Czy ta powierzchnia jest powierzchnią regularną?

23. Torus. Jaką powierzchnię otrzymamy w zadaniu 22 dla $\alpha(u) = r \cos u + R$, $\beta(u) = r \sin u$, przy ustalonych r i R , $0 < r < R$. Ile tego rodzaju parametryzacji potrzeba do pokrycia całego torusa?

24. Helikoida / powierzchnia śrubowa. Napisać równanie powierzchni, która powstanie, jeśli prostą, w chwili początkowej pokrywającą się z osią Ox , będziemy obracać ze stałą prędkością kątową wokół osi Oz i jednocześnie przesuwając ze stałą prędkością w kierunku równoległym do osi Oz . Czy ta powierzchnia jest powierzchnią regularną?

25. Powierzchnia Ennepera. Sprawdzić, że regularne jest odwzorowanie

$$\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2) \in \mathbf{R}^3$$

Policzyć $\mathbf{r}(\sqrt{3}, 0)$ i $\mathbf{r}(-\sqrt{3}, 0)$. Czy odwzorowanie $\mathbf{r}$ jest różnowartościowe?

(Powierzchnia Ennepera na rysunku i wskazówka do dowodu, że w zbiorze $\{(u, v) : u^2 + v^2 < 3\}$ odwzorowanie $\mathbf{r}$ jest różnowartościowe - w książce: J. Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, str. 72.)

26. Małpie siodło. Dla powierzchni $\mathbf{r} : (u, v) \mapsto (u, v, v^3 - 3u^2v)$ napisać wzór, jak zależy $z(u, v)$ od współrzędnych biegunowych (r, ϕ) punktu (u, v) (wstawić $u = r \cos \phi$, $v = r \sin \phi$ do $z(\cdot, \cdot)$).

Jak wygląda wykres funkcji $\mathbf{r}$ zacieśnionej do okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu r ? Co się dzieje przy wzroście r ?

(Małpie siodło na rysunku - np. w książce: M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, str. 159.)

26. Wstęga Möbiusa. Niech $0 < a < b$. Niech w chwili początkowej środek S odcinka $\overline{AB}$ o długości $2a$ znajduje się w punkcie $(b, 0, 0)$ i niech odcinek ten będzie wtedy równoległy do osi Oz : A niech będzie w $(b, 0, a)$, a B w $(b, 0, -a)$. Napisać równanie powierzchni, która powstanie, gdy środek S będzie poruszał się po okręgu $\{x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$, a jednocześnie odcinek będzie obracał się z dwa razy mniejszą prędkością kątową wokół punktu S w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu punktu S (czyli po czasie, gdy S obiegnie okrąg 1 raz punkt A znajdzie się w $(b, 0, -a)$, a punkt B w $(b, 0, a)$). Parametrem u niech będzie kąt między promieniem wodzącym punktu S a osią Ox , parametrem v - z dokładnością do znaku - odległość danego punktu odcinka $\overline{AB}$ od punktu S . Dobrać zakres parametrów (u, v) tak, by obrazem parametryzacji była cała wstęga Möbiusa (bez brzegu) z wyrzuconym odcinkiem o końcach $(b, 0, a)$, $(b, 0, -a)$.

Znaleźć podobną parametryzację dla zbioru {cała wstęga minus odcinek o końcach $(a - b, 0, 0)$, $(-a - b, 0, 0)$ }. Jak będzie wyglądało przejście od jednej parametryzacji do drugiej?

Powierzchnie opisane równaniem $F(x, y, z) = 0$

- 27. Wykres funkcji.** Niech $U \subset \mathbf{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Zapisać zbiór $\{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in U\}$ jako przeciwobraz wartości regularnej 0 dla odpowiednio dobranej funkcji $F : U \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
- 28. Elipsoidal.** Sprawdzić, że równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, gdzie $a, b, c > 0$, opisuje powierzchnię regularną. Znaleźć parametryzację dla jakiegoś podzbioru tej powierzchni.
- 29. Hiperboloida jednowłokowa.** Sprawdzić, że równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, gdzie $a, b, c > 0$, opisuje powierzchnię regularną. Czym są przekroje tej powierzchni płaszczyznami $z = z_0$, $z_0 \in \mathbf{R}$? Czym są przekroje płaszczyzną $x = 0$ i płaszczyzną $y = 0$?
- 30. Hiperboloida dwuwłokowa.** Sprawdzić, że równanie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, gdzie $a, b, c > 0$, opisuje powierzchnię regularną. Czym są przekroje tej powierzchni płaszczyznami $x = x_0$ w zależności od $x_0 \in \mathbf{R}$? Czym są przekroje płaszczyzną $y = 0$ i płaszczyzną $z = 0$?
- *31.** Niech $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > b > c$. Niech dla $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{a, b, c\}$, $F_\lambda(x, y, z) = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda}$.
- a) Jaką – w zależności od wartości parametru λ – powierzchnię opisuje równanie $F_\lambda(x, y, z) = 1$? Dla jakich λ zbiór opisany tym równaniem jest zbiorem pustym?
- b) Niech $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ będzie takim punktem, że $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \neq 0$. Wykazać, że przez punkt p_0 przechodzą trzy powierzchnie, po jednej z każdej z trzech rodzin jakie wystąpią w punkcie a) tego zadania.
- *32.** Niech $f : \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbf{R}$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^\infty$ i niech $\forall (u, v) \in f^{-1}(\{0\})$, $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \neq 0$ lub $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Niech dla $(x, y, z) \in (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^2$, $F(x, y, z) = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Sprawdzić, że $F^{-1}(\{0\})$ jest powierzchnią regularną w $\mathbf{R}^3$.

* Równania uwikłane powierzchni obrotowych

- 33.** Niech $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ i niech $\alpha(t) > 0$ dla wszystkich t . Znaleźć funkcję $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ taką, że powierzchnię, którą otrzymujemy przez obrót krzywej $t \mapsto (\alpha(t), 0, t)$ dookoła osi Oz (por. zadanie 22) będzie można opisać równaniem $F(x, y, z) = 0$. Sprawdzić, czy 0 jest wartością regularną tej funkcji.
- Przykład: *katenuoida* - powierzchnia, którą otrzymujemy, gdy obracamy krzywą łańcuchową $t \mapsto (\cosh t, 0, t)$ dookoła osi Oz . Naszkieować wykres funkcji $y = \cosh x$ i potem naszkicować w układzie xyz otrzymaną powierzchnię obrotową.
- 34.** Niech $\beta : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$. Napisać równanie uwikłane powierzchni obrotowej, która powstanie, gdy krzywą $\mathbf{R}_+ \ni t \mapsto (t, 0, \beta(t)) \in \mathbf{R}^3$ będziemy obracać dookoła osi Oz . Podać parametryzację Monge'a tej powierzchni.
- Przykłady krzywych:
- $t \mapsto (t, 0, t)$,
- $t \mapsto (t, 0, t^2)$.
- (Znaleźć funkcje F i zrobić rysunki.)
- 35.** Niech $f : \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbf{R}$ będzie taką funkcją, że $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ oraz $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)^2 > 0$ dla wszystkich (u, v) należących do $f^{-1}(\{0\})$. Zakładamy ponadto, że $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Wówczas $\{(x, 0, z) : f(x, z) = 0\}$ jest krzywą regularną w płaszczyźnie xOz . Krzywa ta jest zawarta w półpłaszczyźnie $\{(x, 0, z) : x > 0\}$. Napisać równanie uwikłane powierzchni, którą otrzymamy, obracając tę krzywą dookoła osi Oz .
- Przykład: jaką powierzchnię otrzymamy dla $f(u, v) = (u - R)^2 + v^2 - r^2$, gdzie $0 < r < R$?

Wskazówka do zadań 33, 34 i 35:

Niech $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$, $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Napisać równanie przechodzącego przez punkt P okręgu o środku na osi Oz , zawartego w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi. Znaleźć współrzędne punktu P' , w którym ten okrąg przecina półpłaszczyznę $\{(x, y, z) : y = 0, x > 0\}$. Punkt P należy do opisywanej powierzchni obrotowej wtedy i tylko wtedy, gdy P' leży na obracanej krzywej.