

Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany w $\mathbf{R}^3$

Iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^3$ będziemy oznaczać przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Długość wektora $\mathbf{a}$:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}.$$

Cosinus kąta α między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Iloczyn wektorowy:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

gdzie $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Iloczyn mieszany:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

1. Sprawdzić, że $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

2. Udowodnić, że $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo zależne.

3. Sprawdzić, że

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Korzystając z 3. uzasadnić, że

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

5. Uzasadnić, że $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ są liniowo zależne.

6. Sprawdzić, że wektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest prostopadły do $\mathbf{a}$ i jest prostopadły do $\mathbf{b}$.

7. Udowodnić, że jeśli $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, to trójka wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest dodatnio zorientowana (to znaczy: udowodnić, że wyznacznik macierzy przejścia od bazy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ do bazy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest dodatni).

Wskazówka: przy liczeniu wyznacznika skorzystać z 3.

8. Podwójny iloczyn wektorowy. Sprawdzić (przynajmniej dla jakiejś wybranej składowej), że

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}.$$

Czy iloczyn wektorowy jest działaniem łącznym?

9. Korzystając z 4. i 8. udowodnić, że

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle \end{vmatrix}.$$

10. Tożsamość Lagrange'a:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2.$$

11. Udowodnić, że

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha.$$

*12 Udowodnić, że

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

- 13.** Wyrazić przy pomocy iloczynu wektorowego
- pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$,
 - pole trójkąta.
- 14.** Wyrazić przy pomocy iloczynu mieszanego
- objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$,
 - objętość czworościanu.
- 15.** Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ i $\mathbf{w} = (2, 1, 0)$.
- 16.** Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (2, 2, 2)$ i $D = (0, 1, 5)$ oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka D .