

Tomasz Szemberg
Ihor Mykytyuk

Geometria 2, Semestr letni 2011

Zestaw ćwiczeń 10

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 23 – 27 maja 2011.

Zadanie 37 Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią orientowalną, $N : S \rightarrow S^2$ odwzorowaniem Gaussa i $c : I \rightarrow S$ krzywą na S z parametryzacją naturalną. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- a) c jest linią krzywizny na S ;
- b) istnieje funkcja $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\frac{d}{dt}(N(c(t))) = \lambda(t) \cdot \dot{c}(t)$$

dla wszystkich $t \in I$.

Zadanie 38 Udowodnij, że średnia krzywizna może być zdefiniowana również jako średnia całkowa, tzn.

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \kappa_{nor}(\alpha) d\alpha,$$

gdzie $\kappa_{nor}(\alpha)$ oznacza krzywiznę normalną w punkcie p w kierunku stycznym tworzącym kąt α z ustalonym kierunkiem stycznym.

Zadanie 39 Niech S będzie powierzchnią regularną. Udowodnij, że suma krzywizn normalnych w danym punkcie $p \in S$ liczonych w dwóch kierunkach prostopadłych na S nie zależy od wyboru tych kierunków.

Zadanie 40 Udowodnij, że jeśli powierzchnia regularna S jest styczna do tej samej płaszczyzny T wzdłuż pewnej krzywej c , to wszystkie punkty na tej krzywej są paraboliczne bądź płaskie.