

Tomasz Szemberg
Ihor Mykytyuk

Geometria 2, Semestr letni 2011

Zestaw ćwiczeń 4

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 28 marca – 1 kwietnia 2011.

Zadanie 13 Dany jest przedział $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ i funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^\infty$. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna krzywa $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ taka, że

$$c(0) = (0, 0)^\top, \quad \dot{c}(0) = (1, 0)^\top, \quad \kappa(t) = f(t).$$

Oznacza to, że krzywizna z dokładnością do izometrii płaszczyzny determinuje krzywą.

Zadanie 14 Dana jest krzywa

$$c : [0, 2\pi) \ni t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Podaj równanie tej krzywej. Sporządź (z pomocą komputera?) wykres tej krzywej i oblicz jej długość.

Zadanie 15 Naszkicuj parabolę Neila

$$c(t) = (t^2, t^3)^\top$$

w przedziale $t \in [-1, 1]$ i oblicz jej długość.

Zadanie 16 Oblicz krzywiznę cykloidy

$$c(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

wyznacz punkt, w którym krzywizna jest największa i naszkicuj okrąg ściśle styczny (patrz: zadanie 10) w tym punkcie.