

Tomasz Szemberg
Ihor Mykytyuk

Geometria 2, Semestr letni 2011

Zestaw ćwiczeń 3

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 21-25 marca 2011.

Zadanie 9 Wyznaczyć wierzchołki elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zadanie 10 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie punktem, w którym krzywizna krzywej c nie znika, tzn. $\kappa(t_0) \neq 0$. Udowodnij, że istnieje okrąg $O(P_0, r_0)$ o środku w punkcie P_0 i promieniu r_0 taki, że dla pewnej parametryzacji naturalnej $s : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ tego okręgu zachodzą warunki

$$c(t_0) = s(t_0), \quad \dot{c}(t_0) = \dot{s}(t_0), \quad \ddot{c}(t_0) = \ddot{s}(t_0).$$

Te warunki oznaczają, że okrąg $O(P_0, r_0)$ przybliża krzywą c w punkcie t_0 do rzędu co najmniej 2. Taki okrąg nazywamy *ściśle stycznym*.

Wskazówka: $P_0 = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n_c(t_0)$ i $r_0 = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Zadanie 11 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Zbiór środków wszystkich okręgów ściśle stycznych do c (patrz: zadanie 10) nazywamy *ewolutą* krzywej c . Udowodnij, że ewolutą paraboli

$$y = x^2$$

jest krzywa zadana równaniem

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}x^2.$$

Zadanie 12 Zbiór

$$\Gamma = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3, y > 0 \right\}$$

jest górną gałęzią tzw. paraboli Neila. Podaj parametryzację regularną tej krzywej i udowodnij, że jej długość od punktu $(0, 0)$ do punktu $(x, y) \in \Gamma$ opisana jest funkcją

$$\frac{1}{27} \left((9x + 4)^{3/2} - 8 \right).$$

Ponadto wykaż, że krzywizna krzywej Γ przyjmuje (przy odpowiednim wyborze orientacji) wszystkie wartości z zakresu $(0, \infty)$.

Wskazówka: Skorzystaj z zadania 5.