

Tomasz Szemberg
Ihor Mykytyuk

Geometria 2, Semestr letni 2011

Zestaw ćwiczeń 2

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 14-18 marca 2011.

Zadanie 5 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie regularną krzywą parametryczną (niekoniecznie z parametryzacją naturalną). Udowodnij, że w tej sytuacji krzywizna krzywej c zadana jest wzorem:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Zadanie 6 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech F będzie izometrią płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zachowującą orientację (tzn. izometrią parzystą). Udowodnij, że krzywa $F \circ c$ ma tę samą krzywiznę co wyjściowa krzywa c .

Zadanie 7 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną, której obraz zawarty jest w kole o środku z początku układu współrzędnych $Z = (0, 0)$ i promieniu R , tzn. $\|c(t)\| \leq R$ dla wszystkich $t \in I$. Niech $t_0 \in I$ będzie punktem, w którym zachodzi równość $\|c(t_0)\| = R$, tzn. krzywa c jest styczna do okręgu $O(Z, R)$ w punkcie $c(t_0)$. Udowodnij, że

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}.$$

Wskazówka: Rozważać pochodne

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \|c(t)\|^2 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=t_0} \|c(t)\|^2.$$

Zadanie 8 (to zadanie wycofuję z uwagi na brak wiadomości z analizy zespolonej)

Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ będzie krzywą zamkniętą z parametryzacją naturalną, nie przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Na analizie zespolonej (miejmy nadzieję) definiuje się liczbę obiegów jako całkę. Udowodnij, że obie definicje są równoważne tzn.

$$n_c = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z}.$$

Zadanie 8' Wyznaczyć długość łuku cykloidy z zadania 4.