

Geometria Algorytmiczna i Obliczeniowa 2011/12

Tomasz Szemberg

Definicja

Podzbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy otwartym, jeśli dla każdego punktu $\omega \in \Omega$, istnieje liczba dodatnia $r_\omega > 0$ taka, że

$$K(\omega; r_\omega) \subset \Omega.$$

$$K(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 < r^2\}.$$

Przykłady zbiorów otwartych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;

Przykłady zbiorów otwartych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło otwarte $K(a, r)$;

Przykłady zbiorów otwartych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło otwarte $K(a, r)$;
- ▶ półpłaszczyzna, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 1\}$;

Przykłady zbiorów otwartych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło otwarte $K(a, r)$;
- ▶ półpłaszczyzna, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 1\}$;
- ▶ kwadrat, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.

Definicja

Podzbiór $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy domkniętym, jeśli jego dopełnienie $\mathbb{R}^2 \setminus D$ jest zbiorem otwartym.

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło domknięte

$$\overline{K}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 \leq r^2\};$$

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło domknięte
$$\overline{K}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 \leq r^2\};$$
- ▶ półpłaszczyzna domknięta, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$;

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło domknięte
$$\overline{K}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 \leq r^2\};$$
- ▶ półpłaszczyzna domknięta, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$;
- ▶ kwadrat, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło domknięte
$$\overline{K}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 \leq r^2\};$$
- ▶ półpłaszczyzna domknięta, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$;
- ▶ kwadrat, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
- ▶ punkt;

Przykłady zbiorów domkniętych:

- ▶ zbiór pusty i cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$;
- ▶ koło domknięte
$$\overline{K}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a_x - x)^2 + (a_y - y)^2 \leq r^2\};$$
- ▶ półpłaszczyzna domknięta, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$;
- ▶ kwadrat, np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
- ▶ punkt;
- ▶ odcinek wraz z końcami.

Definicja

Podzbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy spójnym, jeśli nie może być rozłożony na nietrywialną sumę rozłączną swoich dwóch podzbiorów domkniętych, tzn. zachodzi implikacja:

$$S = S_1 \cup S_2 \text{ i } S_1, S_2 \text{ domknięte} \Rightarrow S_1 = S \text{ lub } S_2 = S.$$

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;
- ▶ półpłaszczyzna;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;
- ▶ półpłaszczyzna;
- ▶ koło;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;
- ▶ półpłaszczyzna;
- ▶ koło;
- ▶ okrąg;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;
- ▶ półpłaszczyzna;
- ▶ koło;
- ▶ okrąg;
- ▶ kwadrat;

Przykłady zbiorów spójnych:

- ▶ płaszczyzna;
- ▶ prosta;
- ▶ półpłaszczyzna;
- ▶ koło;
- ▶ okrąg;
- ▶ kwadrat;
- ▶ punkt.

Lemat - Definicja. Niech $X \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym podzbiorem płaszczyzny. Wówczas istnieje jednoznaczny rozkład zbioru X na sumę

$$X = \coprod X_\alpha$$

rozłącznych zbiorów spójnych. Zbiory te nazywamy składowymi spójnymi zbioru X .

Lemat - Definicja. Niech $X \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym podzbiorem płaszczyzny. Wówczas istnieje jednoznaczny rozkład zbioru X na sumę

$$X = \coprod X_\alpha$$

rozłącznych zbiorów spójnych. Zbiory te nazywamy składowymi spójnymi zbioru X .

Przykład

Niech $a \neq b$ będą punktami na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Wówczas $\{a\}$ i $\{b\}$ są składowymi spójnymi zbioru $\{a, b\}$.

Problem

Wyznacz punkty przecięcia skończonego zbioru odcinków na płaszczyźnie.

