

Tomasz Szemberg

Geometria 2 stosowana, semestr zimowy 2011/12

Zestaw ćwiczeń 7, na dzień 17 i 24 stycznia 2012

Zadanie 25 Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem zwartym i wypukłym. Udowodnij, że wypukła funkcja odległości $d_C(\cdot, \cdot)$ określona jak na wykładzie spełnia nierówność trójkąta tzn.

$$d_C(p, r) \leq d_C(p, q) + d_C(q, r)$$

dla dowolnych punktów $p, q, r \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 26 Udowodnij, że jeśli punkty p, q, r są współliniowe i punkt q leży między p i r , to w nierówności z zadania 25 zachodzi równość.

Zadanie 27 Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym podzbiorem. Funkcję odległości punktu p od zbioru C definiujemy jako

$$\text{dist}(C, p) := \inf \{ \text{dist}(q, p) : q \in C \}.$$

Wyznacz „symetralną” tzn. zbiór

$$B(G, p) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(G, x) = \text{dist}(p, x) \}$$

prostej G i punktu $p \notin G$.

Zadanie 28 Analogicznie jak w zadaniu 27 możemy zdefiniować odległość dwóch zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$:

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{ \text{dist}(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B \}.$$

Niech A i B będą rozłącznymi odcinkami na płaszczyźnie. Udowodnij, że „symetralna” tzn. zbiór

$$B(A, B) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(A, x) = \text{dist}(B, x) \}$$

dwóch odcinków składa się z co najwyżej siedmiu kawałków prostych i parabol.

Wskazówka: Naszkicuj kilka takich „symetralnych”!