

Geometria 2 semestr zimowy 2011/12

Tomasz Szemberg

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna
- ▶ Bernhard Riemann, 1854, geometria eliptyczna

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna
- ▶ Bernhard Riemann, 1854, geometria eliptyczna
- ▶ i ogólnie: geometrie Riemannowskie na rozmaitościach

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna
- ▶ Bernhard Riemann, 1854, geometria eliptyczna
- ▶ i ogólnie: geometrie Riemannowskie na rozmaitościach
- ▶ Felix Klein, 1871, geometria rzutowa

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna
- ▶ Bernhard Riemann, 1854, geometria eliptyczna
- ▶ i ogólnie: geometrie Riemannowskie na rozmaitościach
- ▶ Felix Klein, 1871, geometria rzutowa
- ▶ David Hilbert, 1899, aksjomatyzacja geometrii

- ▶ Euklides ok. 3 w. p.n.e.
- ▶ Janos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1830, geometria hiperboliczna
- ▶ Bernhard Riemann, 1854, geometria eliptyczna
- ▶ i ogólnie: geometrie Riemannowskie na rozmaitościach
- ▶ Felix Klein, 1871, geometria rzutowa
- ▶ David Hilbert, 1899, aksjomatyzacja geometrii
- ▶ różnica między geometrią eliptyczną $\kappa > 0$, geometrią paraboliczną $\kappa = 0$ i geometrią hiperboliczną $\kappa < 0$, to *krzywizna!*

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty
- ▶ proste

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty
- ▶ proste
- ▶ płaszczyzna

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty
- ▶ proste
- ▶ płaszczyzna
- ▶ relacja incydencji (leżeć na, zawierać się w)

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty
- ▶ proste
- ▶ płaszczyzna
- ▶ relacja incydencji (leżeć na, zawierać się w)
- ▶ relacja uporządkowania (leżenia między)

Aksjomatyka Hilberta płaskiej geometrii euklidesowej (1899)

Pojęcia pierwotne:

- ▶ punkty
- ▶ proste
- ▶ płaszczyzna
- ▶ relacja incydencji (leżeć na, zawierać się w)
- ▶ relacja uporządkowania (leżenia między)
- ▶ relacja przystawania

Aksjomaty incydencji:

- ▶ I.1. Dla każdego dwóch punktów A i B istnieje prosta a przechodząca przez te dwa punkty.

Aksjomaty incydencji:

- ▶ I.1. Dla każdego dwóch punktów A i B istnieje prosta a przechodząca przez te dwa punkty.
- ▶ I.2. Dla każdego dwóch punktów A i B istnieje nie więcej niż jedna prosta przechodząca przez te dwa punkty.

Aksjomaty incydencji:

- ▶ I.1. Dla każdego dwóch punktów A i B istnieje prosta a przechodząca przez te dwa punkty.
- ▶ I.2. Dla każdego dwóch punktów A i B istnieje nie więcej niż jedna prosta przechodząca przez te dwa punkty.
- ▶ I.3. Na każdej prostej istnieją co najmniej dwa punkty. Istnieją co najmniej trzy punkty, które nie leżą na jednej prostej (nie są współliniowe).

Aksjomaty uporządkowania:

- ▶ II.1. Jeśli punkt B leży między punktami A i C , to punkty A, B, C są różnymi punktami tej samej prostej oraz punkt B leży także między punktami C i A .

Aksjomaty uporządkowania:

- ▶ II.1. Jeśli punkt B leży między punktami A i C , to punkty A, B, C są różnymi punktami tej samej prostej oraz punkt B leży także między punktami C i A .
- ▶ II.2. Dla punktów A i C istnieje co najmniej jeden punkt B na prostej wyznaczonej przez A i C taki, że punkt C leży między punktami A i B .

Aksjomaty uporządkowania:

- ▶ II.1. Jeśli punkt B leży między punktami A i C , to punkty A, B, C są różnymi punktami tej samej prostej oraz punkt B leży także między punktami C i A .
- ▶ II.2. Dla punktów A i C istnieje co najmniej jeden punkt B na prostej wyznaczonej przez A i C taki, że punkt C leży między punktami A i B .
- ▶ II.3. Spośród trzech danych punktów na prostej dokładnie jeden leży między dwoma pozostałymi.

Aksjomaty uporządkowania:

- ▶ II.1. Jeśli punkt B leży między punktami A i C , to punkty A, B, C są różnymi punktami tej samej prostej oraz punkt B leży także między punktami C i A .
- ▶ II.2. Dla punktów A i C istnieje co najmniej jeden punkt B na prostej wyznaczonej przez A i C taki, że punkt C leży między punktami A i B .
- ▶ II.3. Spośród trzech danych punktów na prostej dokładnie jeden leży między dwoma pozostałymi.
- ▶ II.4. (aksjomat rozdzielania) Niech punkty A, B, C będą niewspółliniowe i niech prosta a będzie taka, że nie przechodzi przez żaden z punktów A, B ani C . Jeśli prosta a ma punkt wspólny z odcinkiem AB , to ma również punkt wspólny z odcinkiem AC lub z odcinkiem BC .

Aksjomaty przystawiania:

- ▶ III.1. Jeśli punkty A i B leżą na prostej a a punkt A' leży na prostej a' , to po każdej stronie punktu A' istnieje taki punkt B' , że odcinki AB i $A'B'$ są przystające.

Aksjomaty przystawiania:

- ▶ III.1. Jeśli punkty A i B leżą na prostej a a punkt A' leży na prostej a' , to po każdej stronie punktu A' istnieje taki punkt B' , że odcinki AB i $A'B'$ są przystające.
- ▶ III.2. Jeśli odcinki $A'B'$ i $A''B''$ przystają do odcinka AB , to odcinki $A'B'$ i $A''B''$ są przystające.

Aksjomaty przystawania:

- ▶ III.1. Jeśli punkty A i B leżą na prostej a a punkt A' leży na prostej a' , to po każdej stronie punktu A' istnieje taki punkt B' , że odcinki AB i $A'B'$ są przystające.
- ▶ III.2. Jeśli odcinki $A'B'$ i $A''B''$ przystają do odcinka AB , to odcinki $A'B'$ i $A''B''$ są przystające.
- ▶ III.3. Jeśli punkt B leży między punktami A i C a punkt B' między punktami A' i C' oraz odcinki AB i $A'B'$ oraz BC i $B'C'$ są przystające, to przystające są także odcinki AC i $A'C'$.

Aksjomaty przystawania cd.:

- ▶ III.4. Jeśli $\sphericalangle ABC$ jest dany i dana jest półprosta $B'C'$, to po każdej stronie tej półprostej istnieje dokładnie jedna półprosta $B'A'$ taka, że kąty $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'B'C'$ są przystające. Ponadto przystawanie kątów jest relacją równoważności.

Aksjomaty przystawania cd.:

- ▶ III.4. Jeśli $\sphericalangle ABC$ jest dany i dana jest półprosta $B'C'$, to po każdej stronie tej półprostej istnieje dokładnie jedna półprosta $B'A'$ taka, że kąty $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'B'C'$ są przystające. Ponadto przystawanie kątów jest relacją równoważności.
- ▶ III.5. (bkb) Jeśli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ boki AB i $A'B'$ oraz AC i $A'C'$ a także kąty $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle B'A'C'$ są przystające, to przystające są pozostałe pary boków i kątów (czyli trójkąty są przystające).

Aksjomat równoległości:

IV. Aksjomat równoległości

Aksjomat równoległości:

IV. Aksjomat równoległości

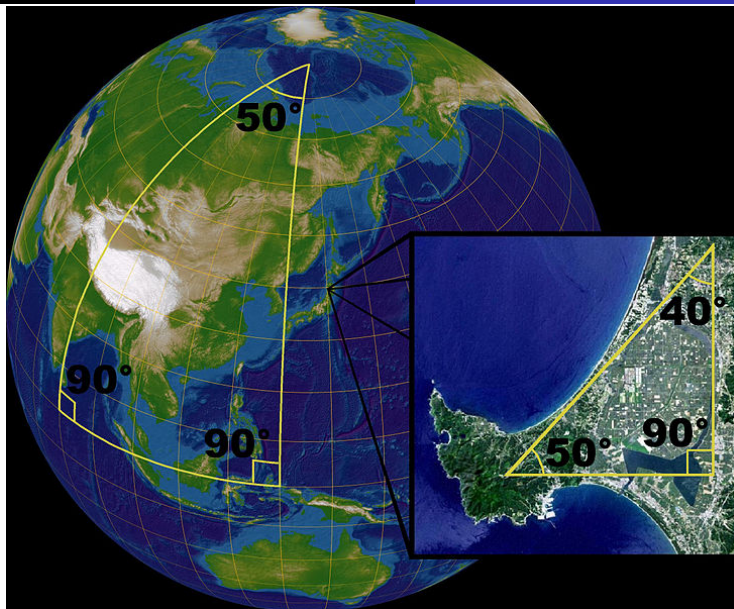
- ▶ IV.1. Niech dana będzie prosta a oraz punkt A nie należący do niej. Wówczas istnieje co najwyżej jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca prostej a .

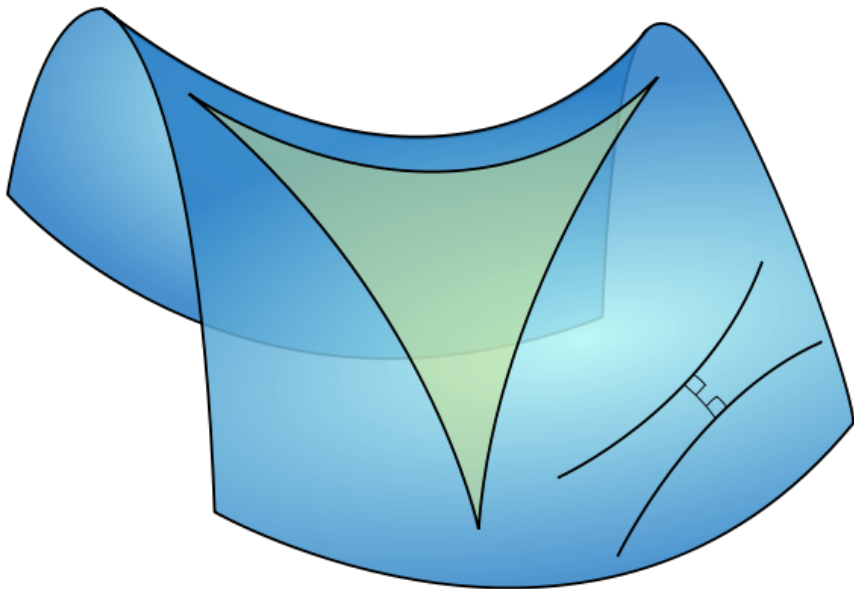
Aksjomaty ciągłości:

- ▶ V.1. (aksjomat Archimedesza) Jeśli AB i CD są dowolnymi odcinkami, to istnieje taka liczba n , że n kopii odcinka CD odłożonych na półprostej AB będzie dłuższe niż odcinek AB .

Aksjomaty ciągłości:

- ▶ V.1. (aksjomat Archimedesza) Jeśli AB i CD są dowolnymi odcinkami, to istnieje taka liczba n , że n kopii odcinka CD odłożonych na półprostej AB będzie dłuższe niż odcinek AB .
- ▶ V.2. (zupełność prostej) Nie można powiększyć zbioru punktów danej prostej i tak określić na tym większym zbiorze relacji uporządkowania i przystawania aby były spełnione aksjomaty I, II, III i V.1.





Model Poincare

