

Tomasz Szemberg
Tomasz Świdorski

Geometria 2, Semestr zimowy 2011/12

Zestaw ćwiczeń 11

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 9 – 13 stycznia 2012.

Zadanie 41 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie punktem, w którym krzywizna krzywej c nie znika, tzn. $\kappa(t_0) \neq 0$. Udowodnij, że istnieje okrąg $O(P_0, r_0)$ o środku w punkcie P_0 i promieniu r_0 taki, że dla pewnej parametryzacji naturalnej $s : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ tego okręgu zachodzą warunki

$$c(t_0) = s(t_0), \quad \dot{c}(t_0) = \dot{s}(t_0), \quad \ddot{c}(t_0) = \ddot{s}(t_0).$$

Te warunki oznaczają, że okrąg $O(P_0, r_0)$ przybliża krzywą c w punkcie t_0 do rzędu co najmniej 2. Taki okrąg nazywamy *ściśle stycznym*.

Wskazówka: $P_0 = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n_c(t_0)$ i $r_0 = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Zadanie 42 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Zbiór środków wszystkich okręgów ściśle stycznych do c (patrz: zadanie 10) nazywamy *ewolutą* krzywej c . Udowodnij, że ewolutą paraboli

$$y = x^2$$

jest krzywa zadana równaniem

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}x^2.$$

Zadanie 43 Oblicz krzywiznę cycloidy

$$c(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

wyznacz punkt, w którym krzywizna jest największa i naszkicuj okrąg ściśle styczny w tym punkcie.

Zadanie 44 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną (niekoniecznie z parametryzacją naturalną) taką, że $\ddot{c}(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in I$. Udowodnij, że skreślenie krzywej c wylicza się wzorem

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{\dot{c}}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2}.$$