

Tomasz Szemberg
Tomasz Świdorski

Geometria 2, Semestr zimowy 2011/12

Zestaw ćwiczeń 10

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 2 – 6 stycznia 2012.

Zadanie 37 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie regularną krzywą parametryczną (niekoniecznie z parametryzacją naturalną). Udowodnij, że w tej sytuacji krzywizna krzywej c zadana jest wzorem:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Zadanie 38 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech F będzie izometrią płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zachowującą orientację (tzn. izometrią parzystą). Udowodnij, że krzywa $F \circ c$ ma tą samą krzywiznę co wyjściowa krzywa c .

Zadanie 39 Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną, której obraz zawarty jest w kole o środku z początku układu współrzędnych $Z = (0, 0)$ i promieniu R , tzn. $\|c(t)\| \leq R$ dla wszystkich $t \in I$. Niech $t_0 \in I$ będzie punktem, w którym zachodzi równość $\|c(t_0)\| = R$, tzn. krzywa c jest styczna do okręgu $O(Z, R)$ w punkcie $c(t_0)$. Udowodnij, że

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}.$$

Wskazówka: Rozważ pochodne

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \|c(t)\|^2 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=t_0} \|c(t)\|^2.$$

Zadanie 40 Wyznacz długość łuku cycloidy z zadania 36.