

Tomasz Szemberg
Tomasz Świdorski

Geometria 2, Semestr zimowy 2011/12

Zestaw ćwiczeń 8

Następujące zadania będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu 5 – 9 grudnia 2011.

Zadanie 29 Niech punkty $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ będą współliniowe. Udowodnij, że

$$S(A, B; C) = \frac{[AC]}{[CB]} \text{ gdzie } [XY] = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

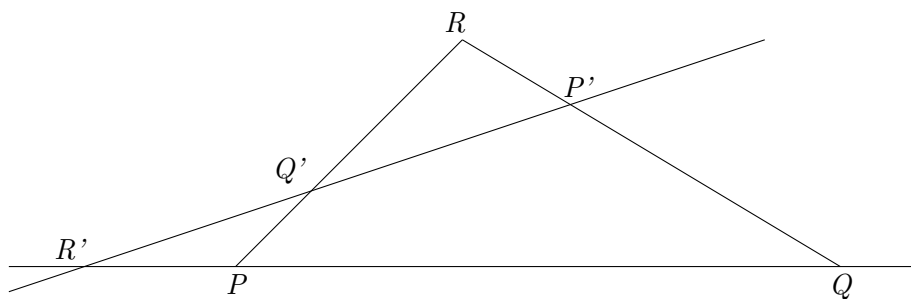
oraz, że

$$[AB] + [BC] + [CA] = 0.$$

Zadanie 30 Udowodnij twierdzenie Menelaosa:

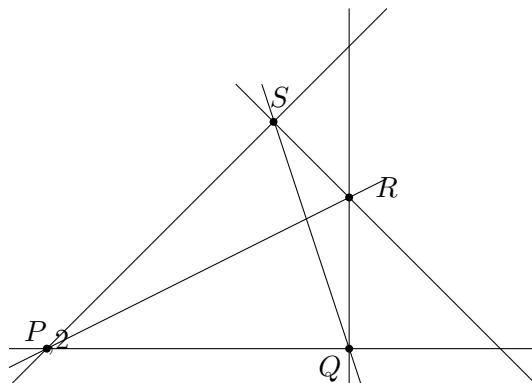
Twierdzenie 1 (Menelaosa) Dany jest trójkąt PQR oraz różne od jego wierzchołków punkty P' , Q' i R' obrane na prostych $pr QR$, $pr PR$ i $pr PQ$, odpowiednio. Następujące warunki są równoważne:

- i) punkty P', Q', R' leżą na jednej prostej;
- ii) $S(P, Q; R') \cdot S(Q, R, P') \cdot S(R, P; Q') = -1$.

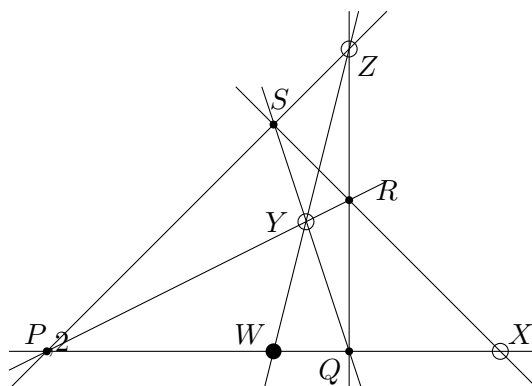


Zadanie 31 Dany jest trójkąt ABC , w którym boki AC i BC są różnej długości. Punkt U jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta $\angle ACB$ z prostą AB a punkt V jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przyległego do kąta ACB z prostą AB . Uzasadnij, że punkty A, B, U, V tworzą czwórkę harmoniczną. Co by było, gdyby wyjściowy trójkąt był równoramienny? Znajdź właściwą interpretację twierdzenia w tej sytuacji.

Zadanie 32 Definicja 1 Niech P, Q, R, S będą punktami na płaszczyźnie w położeniu ogólnym tzn. takim, że żadne trzy nie leżą na jednej prostej i żadne dwie spośród wyznaczonych przez nie prostych nie są równoległe. Taki układ nazywamy czworokątem zupełnym. Punkty P, Q, R, S nazywamy wierzchołkami tego czworokąta, zaś proste wyznaczone przez pary wierzchołków nazywamy bokami. (A zatem czworokąt zupełny ma 6 boków!)



Zauważmy, że boki czworokąta zupełnego przecinają się w trzech dodatkowych punktach oznaczonych na rysunku poniżej literami X, Y i Z . Są to tzw. punkty przekątniowe czworokąta zupełnego $PQRS$.



Punkt W jest punktem przecięcia przekątnej YZ z prostą PQ .

Twierdzenie 2 (o czworokącie zupełnym) W sytuacji jak na rysunku powyżej punkty P, Q, W, X tworzą czwórkę harmoniczną.

Udowodnij to twierdzenie.