

Zagadnienia do egzaminu z geometrii dla studentów I roku matematyki studiów stacjonarnych II stopnia
czerwiec 2012

I. Powierzchnie regularne w $\mathbf{R}^3$

1. Odwzorowanie regularne. Parametryzacja regularna płata powierzchni. Powierzchnia regularna w $\mathbf{R}^3$. Przykłady.
2. Punkt krytyczny odwzorowania. Wartość krytyczna. Wartość regularna.
3. Równanie uwikłane powierzchni. Kiedy równanie $F(x, y, z) = 0$ opisuje powierzchnię regularną w $\mathbf{R}^3$ (warunek dostateczny). Przykłady powierzchni opisanych równaniem uwikłanym.
4. Szczególna postać parametryzacji powierzchni - wykres funkcji. Kiedy w otoczeniu punktu p powierzchnię można przedstawić jako wykres funkcji $z = z(x, y)$, kiedy jako wykres funkcji $x = x(y, z)$, a kiedy jako wykres funkcji $y = y(x, z)$?
5. Współrzędne krzywoliniowe. Linie parametrów u, v .
6. Jaką postać ma związek między parametryzacjami regularnymi opisującymi ten sam fragment powierzchni?
7. Jak możemy opisać krzywą na powierzchni M , gdy znamy lokalną parametryzację tej powierzchni. Wektor styczny do powierzchni M w punkcie p .
8. Przestrzeń wektorowa $T_p M$. Baza przestrzeni wektorowej $T_p M$. Różne sposoby zapisu tych wektorów bazowych. Jak możemy opisać $T_p M$, gdy znamy lokalną parametryzację powierzchni w otoczeniu punktu p ? Jak możemy opisać $T_p M$ dla powierzchni danej równaniem uwikłanym $F(x, y, z) = 0$?
9. Gradient funkcji F w punkcie p .
10. Płaszczyzna (ozn. na tym wykładzie Π_p) styczna do powierzchni M w punkcie p . Związek Π_p z $T_p M$ i różnica między nimi. Dlaczego płaszczyznę styczną Π_p można uważać za liniowe przybliżenie powierzchni M w otoczeniu punktu p ?
11. Wektor prostopadły do powierzchni M w punkcie p . Jak znaleźć wektor prostopadły, gdy dana jest parametryzacja. Wektor prostopadły do powierzchni danej równaniem uwikłanym. Wektor prostopadły o jednostkowej długości.
12. Równanie płaszczyzny stycznej Π_p gdy dana jest lokalna parametryzacja powierzchni. Równanie płaszczyzny stycznej Π_p do powierzchni opisanej równaniem uwikłanym.
13. Prosta normalna do powierzchni w punkcie p . Kąt, pod jakim przecinają się dwie powierzchnie.
14. Pierwsza forma podstawowa powierzchni / tensor metryczny na powierzchni.
15. Jak można wyliczyć długość krzywej leżącej na powierzchni, gdy zna się pierwszą formę podstawową. Odległość punktów na powierzchni.
16. Cosinus kąta, pod jakim przecinają się krzywe na powierzchni. W szczególności: cosinus kąta między liniami parametrów.
17. Współrzędne izotermiczne.
18. Jak liczymy pole obszaru na powierzchni o zadanej parametryzacji.
19. Formuła Gaussa. Druga forma podstawowa powierzchni. Koneksja liniowa indukowana na powierzchni M z $\mathbf{R}^3$.
20. Odwzorowanie Gaussa / odwzorowanie sferyczne.
21. Jeśli $p \mapsto \mathbf{N}_p$ jest polem jednostkowych wektorów prostopadłych do M - do jakiej podprzestrzeni wektorowej w $\mathbf{R}^3$ należy $(D_X \mathbf{N})_p$? Formuła Weingartena. Operator kształtu.
22. Związek między pierwszą formą podstawową, drugą formą podstawową i operatorem kształtu.
23. Równania fundamentalne - równanie Gaussa, równania Codazziego (dla h i dla S).
24. Krzywizna Gaussa powierzchni. Różne sposoby wyliczenia (zadania 93 i 94). Interpretacja geometryczna krzywizny Gaussa. Gaussa *theorem egregium* (zadanie 94). Przykłady powierzchni o stałej krzywiznie Gaussa (tylko nazwy - nie trzeba pamiętać wzorów na parametryzację).

25. Krzywizna średnia powierzchni w punkcie p . Powierzchnie minimalne. Przykłady powierzchni minimalnych.
26. Interpretacja geometryczna drugiej formy podstawowej. Klasyfikacja punktów powierzchni: punkty eliptyczne, punkty hiperboliczne, punkty paraboliczne i punkty spłaszczenia.

II. Funkcje różniczkowalne na powierzchni i pierścień $C^\infty(M)$

1. Kiedy mówimy, że funkcja rzeczywista określona na powierzchni M jest różniczkowalna w punkcie p ? Kiedy mówimy, że jest różniczkowalna? Kiedy (przy założeniu, że M jest klasy C^r , $r \geq k$) mówimy, że jest to funkcja klasy C^k dla $k \in \mathbf{N}$, $k = \omega$ oraz $k = \infty$?
2. Zbiór $C^\infty(M)$. Działania w tym zbiorze.

III. Pola wektorowe, 1-formy, pola tensorowe

1. Różniczka funkcji $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ w punkcie p (definicja, poprawność definicji, liniowość tego odwzorowania). Działanie wektora $\mathbf{v} \in T_p M$ na funkcję f .
2. Pole wektorowe na powierzchni M (styczne do M). Zbiór $\mathcal{X}(M)$. Jakie działania możemy wykonywać na polach wektorowych?
3. Działanie pola wektorowego na funkcję. Jak działają na funkcję wektorowe pola bazowe związane z parametryzacją? Własności odwzorowania $C^\infty(M) \ni f \mapsto X(f) \in C^\infty(M)$.
4. Co to jest 1-forma? (dwa sposoby zdefiniowania). Różniczka df funkcji f jako przykład 1-formy. Jak działają różniczki du , dv na pola bazowe związane z parametryzacją? Baza przestrzeni $(T_p M)^*$. Rozpisanie df w bazie du , dv .
5. Iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych o wartościach w $\mathbf{R}$. Iloczyn tensorowy 1-form. Baza przestrzeni odwzorowań dwuliniowych działających z przestrzeni wektorowej do $\mathbf{R}$.
6. Pola tensorowe typu $(0, k)$ i typu $(1, k)$ - po dwie definicje i związek między polami zdefiniowanymi na te dwa różne sposoby. W którą stronę przejście nie jest oczywiste i który warunek z definicji to przejście umożliwia?
7. Przykłady pól tensorowych - typu $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$.
8. Lokalna baza w przestrzeni pól tensorowych typu $(0, 2)$. Jak z przedstawienia t w bazie $du \otimes du$, $du \otimes dv$, $dv \otimes du$, $dv \otimes dv$ odczytać wartości t na parach pól bazowych z bazy ∂_u , ∂_v .
9. Jeśli na M mamy zadany tensor metryczny lub pseudometryczny g - opisać odwzorowanie, które jest izomorfizmem $C^\infty(M)$ -modułu $\mathcal{X}(M)$ i $C^\infty(M)$ -modułu wszystkich 1-form na M .

IV. Różniczkowanie D_X w kierunku pola wektorowego X

1. Pole wektorowe na powierzchni M w znaczeniu ogólniejszym (niekoniecznie styczne do M). Definicja $D_X W$ dla $X \in \mathcal{X}(M)$, $W : M \rightarrow \mathbf{R}^3$. Własności odwzorowania $(X, W) \mapsto D_X W$.
2. Czym jest $D_X Y$, gdy X i Y są polami bazowymi związanymi z parametryzacją $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$?

V. Koneksja liniowa

1. Koneksja liniowa na M . Od czego zależy $(\nabla_X Y)(p)$.
2. Symbole Christoffela drugiego rodzaju.
3. Tensor torsji koneksji liniowej. Zadanie 86. Jaką własność symetrii względem przestawienia indeksów mają symbole Christoffela gdy koneksja jest koneksją bez torsji?

4. Tensor krzywizny koneksji liniowej. Zadanie 87. Umiejętność wyliczenia $R(\cdot, \cdot) \cdot$ na trójkach wektorów z bazy ∂_u, ∂_v , gdy dane są symbole Christoffela $\Gamma_{jk}^i, i, j, k \in \{1, 2\}$.
5. Pochodna kowariantna pola tensorowego typu $(0, 2)$. Pochodna kowariantna pola tensorowego typu $(1, 1)$.
6. Koneksja Levi-Civity. Przykład tensora metrycznego g i koneksji ∇ , która jest koneksją Levi-Civity dla g .
7. Symbole Christoffela pierwszego rodzaju dla koneksji Levi-Civity.
8. Interpretacja geometryczna warunku $\nabla g = 0$.

VI. Algebra Liego $\mathcal{X}(M)$

1. Odpowiedniość między zbiorem pól wektorowych na M a pewną klasą odwzorowań $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ - jakie dwa warunki mają spełniać te odwzorowania?
2. Jakie odwzorowanie $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ odpowiada polu $[X_1, X_2]$?
3. Własności odwzorowania $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ - zadania 84 i 85.
4. Algebra Liego.
5. Ile wynosi $[\partial_u, \partial_v]$ dla związanych z parametryzacją pól bazowych ∂_u, ∂_v ?

VII. Przesunięcie równoległe i linie geodezyjne

1. Pole wektorowe X określone wzdłuż krzywej γ .
2. Pochodna kowariantna $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ pola X wzdłuż γ .
3. Pole równoległe wzdłuż krzywej γ .
4. Przesunięcie równoległe $\tau_\gamma : T_p M \rightarrow T_q M$ wzdłuż łączącej punkty p i q krzywej γ . Jakie to jest odwzorowanie i czy może zależeć od drogi γ , czy nigdy nie zależy?
5. Krzywa geodezyjna. Przykłady. Czy to, że krzywa jest geodezyjną zależy od jej parametryzacji czy nie?
6. Dla jakiej klasy powierzchni problem znalezienia odległości między punktami można sprowadzić do znalezienia łączącej te punkty geodezyjnej (lub większej ilości geodezyjnych) i policzenia jej długości (porównania ich długości).