

15 Powierzchnie minimalne

W ostatnim wykładzie rozważymy powierzchnie minimalizujące powierzchnię.

Definicja 15.1 (Pole krzywizny) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną (niekoniecznie orientowalną) i niech N będzie polem wektorów normalnych (niekoniecznie regularnym). Polem krzywizny nazywamy pole wektorowe

$$\mathcal{H}(p) := H(p) \cdot N(p),$$

gdzie $H(p)$ oznacza jak zwykle krzywiznę średnią (patrz definicja 12.3).

Poniższe twierdzenie opisuje zmianę pola powierzchni pod wpływem deformacji.

Twierdzenie 15.2 (Zmiana pola powierzchni przy deformacji) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną ze skończonym polem. Niech $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularnym polem wektorów normalnych z nośnikiem zwartym (tzn. poza pewnym zwartym podzbiorem S , pole Φ jest równe zero).

Dla dostatecznie małych wielkości t , zbiór

$$S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$$

jest powierzchnią regularną o skończonym polu, oraz zachodzi równość

$$\frac{d}{dt}A[S_t]|_{t=0} = -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Dowód. Na wykładzie

□

Wniosek 15.3 (Powierzchnie minimalizujące pole) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną ze zwartym domknięciem $\bar{S}$. Jeśli S ma minimalną powierzchnię wśród wszystkich powierzchni $\tilde{S}$ o tym samym brzegu, tzn.

$$\partial\tilde{S} = \bar{\tilde{S}} \setminus \tilde{S} = \bar{S} \setminus S = \partial S,$$

to pole krzywizny S jest zerowe, tzn.

$$\mathcal{H}(p) = (0, 0, 0)^\top$$

dla wszystkich $p \in S$.

Dowód. Na wykładzie

□

Własność opisana we wniosku prowadzi do następującej definicji.

Definicja 15.4 (Powierzchnia minimalna) Mówimy, że powierzchnia $S \subset \mathbb{R}^3$ jest minimalna, jeśli

$$\mathcal{H}(p) = (0, 0, 0)^\top$$

dla wszystkich $p \in S$.

Sformułowanie wniosku nasuwa następujący problem: mając daną zamkniętą krzywą przestrzenną c , wyznaczyć powierzchnię regularną S taką, że $c = \partial S$ i S ma minimalne pole, wśród wszystkich powierzchni tego typu. Problem ten jest znany jako *problem Plateau* (od nazwiska belgijskiego fizyka). Krzywizna Gaussa powierzchni minimalnych podlega pewnym ograniczeniom.

Twierdzenie 15.5 (Krzywizna Gaussa powierzchni minimalnych) *Dla każdej powierzchni regularnej mamy*

$$K(p) \leq H(p)^2.$$

W szczególności, krzywizna Gaussa powierzchni minimalnej spełnia warunek

$$K(p) \leq 0,$$

dla wszystkich punktów p tej powierzchni.

Dowód. Na wykładzie

□

Wniosek 15.6 *Powierzchnie minimalne nie są zwarte.*

Istnieje jeszcze wiele ciekawych rodzajów powierzchni, np. powierzchnie obrotowe. Istnieje wiele ciekawych własności powierzchni *abstrakcyjnych* tzn. nie związanych z żadnym konkretnym zanurzeniem w przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$. Na tym wykładzie nie zdążyłem o nich opowiedzieć. Może uda się to kiedy indziej.