

Wykład Geometria 2

Tomasz Szemberg

semestr letni 2011

Spis treści

1	Krzywe w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.	2
2	Krzywe płaskie.	4
3	Krzywe płaskie wypukłe	8
4	Nierówność izoperymetryczna	9
5	Krzywe przestrzenne	11
6	Powierzchnie regularne	13
7	Płaszczyzna styczna	17
8	Pierwsza forma fundamentalna	18
9	Pole wektorowe normalne i orientowalność	19
10	Druga forma fundamentalna	20
11	Krzywizna normalna	21
12	Lokalne własności powierzchni	22
12.1	Geometryczna interpretacja krzywizny Gaussa	23
13	Całkowanie na powierzchniach	24
14	Powierzchnie kreślne	26
15	Powierzchnie minimalne	26

1 Krzywe w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Na tym wykładzie poznamy podstawowe pojęcia dotyczące krzywych zanurzonych w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$.

Przez przedział $I \subset \mathbb{R}$ będziemy na tym wykładzie rozumieć dowolny ograniczony lub nieograniczony przedział domknięty, otwarty lub półotwarty.

Definicja 1.1 (Krzywa parametryczna) Krzywą parametryczną nazywamy odwzorowanie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^∞ z przedziału $I \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$. Krzywą parametryczną nazywamy regularną, jeśli wektor prędkości (pochodna $\dot{c}(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))$) odwzorowania c nie znika w żadnym punkcie przedziału I , tzn. $\dot{c}(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in I$.

Przykład 1.2 (Prosta) Prosta w $\mathbb{R}^n$ przechodząca przez punkt $c_0 \in \mathbb{R}^n$ i mająca kierunek $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ może być zapisana jako regularna krzywa parametryczna

$$c : \mathbb{R} \ni t \rightarrow c_0 + t \cdot v \in \mathbb{R}^n.$$

Przykład 1.3 (Okrąg) Okrąg na płaszczyźnie o środku w punkcie $(0, 0)^\top$ i promieniu r jest również regularną krzywą parametryczną

$$c : \mathbb{R} \ni t \rightarrow (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Uwaga 1.4 (Konwencja dla wektorów) W powyższym przykładzie pojawia się transpozycja $(\ , \)^\top$ wektora. Przyjmujemy konwencję, że wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są kolumnami. Może się to wydawać pedanterią, ale w praktyce ułatwia i ujednolica zapis.

Przykład 1.5 (Traktrysa) Następująca krzywa ma ciekawą interpretację fizyczną

$$c : (0, \pi) \ni t \rightarrow (\sin t, \cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2))^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Jest to krzywa parametryczna, ale nie regularna.

W powyższych przykładach utożsamialiśmy krzywą parametryczną z jej obrazem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a więc z pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Nie jest to do końca poprawne, gdyż ten sam zbiór można sparametryzować na wiele różnych sposobów.

Definicja 1.6 (Zmiana zmiennych dla krzywej) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą parametryczną. Zmianą zmiennych krzywej c nazywamy bijektywne odwzorowanie $\varphi : J \rightarrow I$, gdzie $J \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a odwzorowanie φ i odwzorowanie odwrotne φ^{-1} są klasy C^∞ . Złożenie $\tilde{c} = c \circ \varphi$ nazywamy reparametryzacją krzywej c .

Pochodna bijekcji φ klasy C^∞ między dwoma przedziałami w $\mathbb{R}$ nie znika w żadnym punkcie, jest zatem albo stale dodatnia, albo stale ujemna.

Definicja 1.7 (Orientacja a zmiana zmiennych) Mówimy, że zmiana zmiennych $\varphi : J \rightarrow I$ zachowuje orientację, jeśli $\dot{\varphi}(t) > 0$ dla wszystkich $t \in J$. Mówimy, że zmiana zmiennych $\varphi : J \rightarrow I$ zmienia orientację, jeśli $\dot{\varphi}(t) < 0$ dla wszystkich $t \in J$.

Uwaga 1.8 (Regularność reparametryzacji) Jeśli krzywa parametryczna c jest regularna, to także każda jej reparametryzacja jest regularna.

Zmiana zmiennych wprowadza relację równoważności w zbiorze wszystkich krzywych parametrycznych.

Definicja 1.9 (Równoważność krzywych) Dwie krzywe parametryczne $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy równoważnymi, jeśli istnieje odwzorowanie dyfeomorfizm $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ klasy C^∞ , taki, że φ jest zmianą zmiennych na krzywej c_1 oraz $c_2 = c_1 \circ \varphi$.

Teraz już możemy zdefiniować *krzywą* jako klasę równoważności krzywych parametrycznych względem powyższej relacji równoważności. Nawiązując do analizy, widzimy, że krzywa to nic innego jak jednowymiarowa rozmaitość rzeczywista klasy C^∞ pokryta jedną mapą. Czasem kierunek, w którym dana krzywa jest parametryzowana jest istotny.

Definicja 1.10 (Krzywa zorientowana) Krzywą zorientowaną nazywamy klasę równoważności krzywych parametrycznych względem relacji jak w definicji 1.9 ograniczonej do zmian zmiennych zachowujących orientację.

Oczywiście, każda krzywa może być zorientowana na dokładnie dwa sposoby.

Często wygodnie jest posługiwać się pewną specjalną parametryzacją, którą definiujemy poniżej.

Definicja 1.11 (Parametryzacja naturalna) Mówimy, że krzywa $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest parametryzowana naturalnie (lub parametryzowana wg. długości łukowej), jeśli $\|\dot{c}(t)\| = 1$ dla wszystkich $t \in I$.

W interpretacji fizycznej parametryzacja naturalna odpowiada ruchowi punktu materialnego ze stałą prędkością. I w ten sposób doszliśmy do pierwszego twierdzenia w naszej teorii.

Twierdzenie 1.12 (Istnienie parametryzacji naturalnej) Każdą regularną krzywą parametryczną można sparametryzować naturalnie. Ponadto można tego dokonać za pomocą zmiany zmiennych zachowującej orientację.

Dowód. Na wykładzie. □

Naturalne jest w tym kontekście pytanie na ile jednoznaczna (przy ustalonej orientacji) jest parametryzacja naturalna. Okazuje się, że parametryzacja naturalna jest jednoznaczna z dokładnością do wyboru dziedziny parametryzacji.

Lemat 1.13 (Jednoznaczność parametryzacji naturalnej) Niech $c_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla $i = 1, 2$ będą równoważnymi parametryzacjami naturalnymi o zgodnej orientacji. Wówczas istnieje liczba rzeczywista t_0 taka, że dla zmiany zmiennych

$$\varphi : I_1 \ni t \rightarrow t + t_0 \in I_2$$

mamy $c_1 = c_2 \circ \varphi$.

Dowód. Na wykładzie. □

Wyróżnimy jeszcze dwie klasy krzywych.

Definicja 1.14 (Krzywe okresowe i zamknięte) Mówimy, że krzywa parametryczna $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest okresowa z okresem $P \in \mathbb{R}$, jeśli dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$c(t + P) = c(t), \quad (1)$$

liczba P jest dodatnia i równość (1) nie zachodzi dla żadnej liczby $P' < P$ mniejszej niż P .

Krzywą nazywamy zamkniętą, jeśli posiada regularną parametryzację okresową.

Krzywą zamkniętą nazywamy krzywą zamkniętą prostą, jeśli posiada regularną parametryzację okresową z okresem P taką, że restrykcja $c|_{[0,P]}$ jest odzorowaniem injektywnym.

Ważnym pojęciem związanym z krzywymi jest ich długość.

Definicja 1.15 (Długość krzywej) Niech $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą parametryczną. Długością krzywej c nazywamy liczbę

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Pojęcie to ma sens oczywiście tylko wtedy, gdy nie zależy od wybranej parametryzacji.

Lemat 1.16 (Niezależność długości od parametryzacji) Długość krzywej nie zależy od parametryzacji.

Dowód. Na wykładzie. □

Niech $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Wówczas z definicji 1.15 natychmiast wynika, że dla dowolnego $s \in [a, b]$ mamy

$$L[c|_{[a,s]}] = \int_a^s 1 dt = s - a.$$

Czyli długość krzywej z parametryzacją normalną odpowiada długości odcinka, na którym ta parametryzacja jest zdefiniowana.

Przykład 1.17 (Długość okręgu) Okrąg jednostkowy sparametryzowany jest naturalnie (por. przykład 1.3) przez odwzorowanie

$$c : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Jego obwód wynosi zatem 2π .

2 Krzywe płaskie.

Definicja 2.1 (Krzywa płaska) Krzywą parametryczną $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy krzywą płaską (zawartą w płaszczyźnie).

Szczególną cechą krzywych płaskich jest możliwość wyznaczenia *pola wektorów normalnych*.

Definicja 2.2 (Wektor normalny do krzywej płaskiej) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą parametryzowaną naturalnie. Wówczas wektor

$$n(t) = n_c(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{c}(t)$$

nazywamy wektorem normalnym w punkcie $c(t)$.

Uwaga 2.3 (Baza ortonormalna) Jeśli krzywa $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest parametryzowana naturalnie, to wektory $\dot{c}(t)$ i $n_c(t)$ tworzą dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (tzn. oba mają długość 1, są prostopadłe do siebie i wyznacznik macierzy $(\dot{c}(t), n_c(t))$ jest równy 1).

Uwaga 2.4 (Konwencja dla wiązki stycznej do $\mathbb{R}^2$) Baza z powyższego lematu zależy od parametru t , tzn. zmienia się wraz ze zmianą punktu na krzywej c . Właściwiej jest traktować ją jako bazę przestrzeni stycznej do $\mathbb{R}^2$ w punkcie $c(t)$. Dla uproszczenia jednak utożsamia się przestrzeń styczną $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ w każdym punkcie (x, y) z wyjściową przestrzenią $\mathbb{R}^2$.

Dla krzywej parametryzowanej naturalnie mamy

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \equiv 1.$$

Różniczkując tę tożsamość stronami po t dostajemy

$$\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$$

dla każdego $t \in I$. Tutaj $\ddot{c}(t)$ oznacza wektor drugich pochodnych $(c_1''(t), c_2''(t))^T$. Związek ten oznacza w szczególności, że wektory $n_t(c)$ i $\ddot{c}(t)$ są proporcjonalne. Pozwala to na zdefiniowanie funkcji opisującej tę proporcję w zależności od zmiennej t .

Definicja 2.5 (Krzywizna płaska) Krzywizną krzywej $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ z parametryzacją naturalną nazywamy funkcję $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną warunkiem

$$\ddot{c}(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t).$$

Funkcja ta mierzy zakrzywienie krzywej (tzn. odchylenie od prostej). Im większa wartość bezwzględna krzywizny, tym większe zakręcenie krzywej.

Przykład 2.6 (Krzywizna okręgu) Niech c będzie okręgiem o promieniu r . Wówczas krzywizna jest stała i wynosi

$$\kappa \equiv \frac{1}{r}.$$

Pochodna parametryzacji c może być interpretowana fizycznie jako *prędkość* poruszania się punktu materialnego po krzywej c . Oznaczając $v(t) = \dot{c}(t)$ mamy następujący związek.

Twierdzenie 2.7 (Równania Freneta) *Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą płaską z parametryzacją naturalną. Wówczas*

$$(\dot{v}(t), \dot{n}(t)) = (v(t), n(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dowód. Na wykładzie □

Gdy punkt porusza się po okręgu można mówić o ilości pełnych obiegów w danym przedziale czasu (parametru t). Spróbujemy tę intuicję przenieść na dowolne krzywe płaskie.

Lemat 2.8 (Funkcja obrotu ϑ) *Dla dowolnej krzywej płaskiej $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ z parametryzacją naturalną istnieje funkcja $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ taka, że*

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Funkcja ϑ nie jest wyznaczona jednoznacznie, ale z dokładnością do krotności 2π , tzn. jeśli ϑ_1 i ϑ_2 spełniają równanie (2), to $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności różnica $\vartheta(b) - \vartheta(a)$ zależy tylko od krzywej c .

Liczba $\vartheta(t)$ mierzy odchylenie wektora prędkości $\dot{c}(t)$ od poziomu, tzn. od osi OX . Ten kąt jest ustalony naturalnie tylko z dokładnością do krotności 2π . Można by ustalić, że bierzemy kąty tylko z przedziału $[0, 2\pi)$, ale wtedy funkcja ϑ miałaby skoki w miejscach, gdzie krzywa c dokonałaby pełnego obiegu. Istota lematu polega na tym, że funkcja ϑ jest tak samo regularna jak wyjściowa parametryzacja $c(t)$.

Dowód. Na wykładzie □

Powyższa parametryzacja pozwala na zdefiniowanie *liczby obrotów* krzywych okresowych.

Definicja 2.9 (Liczba obrotów) *Niech $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą okresową o okresie P z parametryzacją naturalną i niech ϑ będzie funkcją z Lematu 2.8. Wówczas*

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\vartheta(P) - \vartheta(0))$$

jest liczbą całkowitą, zwaną liczbą obrotów krzywej c .

Przykład 2.10 (Liczba obrotów okręgu) *Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu r ma parametryzację naturalną*

$$c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t/r) \\ r \cdot \sin(t/r) \end{pmatrix}$$

i okres $P = 2\pi \cdot r$. Jako funkcję ϑ możemy zatem (rachunek!) wziąć $\vartheta(t) = t/r + \pi/2$. Wtedy liczba obrotów jest równa

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(2\pi r) - \vartheta(0)) = 1,$$

co jest zgodne z naszą intuicją.

Liczba obrotów jest niezmiennikiem krzywej niezależnym od zmiany parametryzacji, z dokładnością do znaku.

Lemat 2.11 (Liczba obrotów a zmiana parametryzacji) *Niech $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będą dwoma krzywymi płaskimi z parametryzacją naturalną i okresem P . Jeśli c_2 jest reparametryzacją c_1 za pomocą zmiany zmiennych zachowującej orientację (patrz: definicja 1.7), to*

$$n_{c_1} = n_{c_2}.$$

Jeśli reparametryzacja zmienia orientację, to

$$n_{c_1} = -n_{c_2}.$$

Dowód. Na wykładzie □

Z lematu wynika, że liczba obrotów n_c jest dobrze zdefiniowana dla zorientowanej krzywej płaskiej zamkniętej. Istnieje następujący związek liczby obrotów z krzywizną.

Twierdzenie 2.12 (Liczba obrotów a krzywizna) *Niech $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą płaską okresową o okresie P z parametryzacją naturalną i z krzywizną $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^P \kappa(t) dt.$$

Dowód. Na wykładzie □

Twierdzenie 2.13 (Hopfa, Umlaufsatz) *Krzywa zamknięta prosta ma liczbę obrotów równą 1 lub -1 w zależności od orientacji.*

Dowód tego twierdzenia wymaga pewnych faktów pomocniczych.

Definicja 2.14 (Zbiór gwiaździsty) *Podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym względem punktu $x_0 \in X$, jeśli dla dowolnego punktu $x \in X$ odcinek $\overline{x x_0} \subset X$ jest w całości zawarty w zbiorze X .*

Analitycznie powyższy warunek oznacza, że

$$tx + (1-t)x_0 \in X \quad \text{dla wszystkich } t \in [0, 1].$$

W następnym lemacie S^1 oznacza okrąg jednostkowy w $\mathbb{R}^2$.

Lemat 2.15 (O podniesieniu) *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu $x_0 \in X$. Niech $e : X \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem ciągłym (retrakcją). Wówczas istnieje ciągle odwzorowanie $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, takie, że*

$$e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix}$$

dla wszystkich punktów $x \in X$. Ponadto odwzorowanie ϑ jest jednoznacznie określone przez wartość $\vartheta_0 = \vartheta(x_0)$ w punkcie x_0 .

Dowód. Na wykładzie □

Dowód. twierdzenia 2.13 na wykładzie. □

3 Krzywe płaskie wypukłe

Definicja 3.1 (Krzywa wypukła) *Krzywą płaską nazywamy wypukłą, jeśli styczna do krzywej w dowolnym jej punkcie rozdziela płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny domknięte takie, że krzywa leży w całości w jednej z tych półpłaszczyzn.*

Uwaga 3.2 (Wypukłość a krzywe wypukłe) Krzywa wypukła **nie jest** zbiorem wypukłym w rozumieniu geometrii analitycznej. Jest jednak częścią brzegu pewnego obszaru wypukłego w $\mathbb{R}^2$.

Warunek z definicji 3.1 można zapisać też analitycznie. Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie parametryzacją naturalną, a $n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ niech będzie polem wektorów normalnych wzdłuż c . Wówczas dla dowolnych $t, t_0 \in I$ zachodzi jedna z nierówności:

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad \text{lub} \quad \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0. \quad (3)$$

Uwaga 3.3 (Charakteryzacja odcinków) Jeśli dla pewnej krzywej c zachodzą jednocześnie oba warunki w (3), to obraz c jest zawarty w pewnej prostej.

Wypukłość prostej jest ściśle związana z krzywizną.

Twierdzenie 3.4 (Wypukłość a krzywizna) *Niech $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą zamkniętą prostą z parametryzacją naturalną i niech $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jej krzywizną. Krzywa c jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek*

$$\kappa(t) \geq 0 \quad \text{lub} \quad \kappa(t) \leq 0.$$

Dowód. Na wykładzie □

Uwaga 3.5 W powyższym twierdzeniu założenie, że krzywa zamknięta jest prosta jest istotne (tzn. nie można go pominąć).

Wniosek 3.6 *Z dowodu twierdzenia 3.4 wynika, że dla krzywej wypukłej (niekoniecznie zamkniętej) z parametryzacją naturalną zachodzi*

$$\kappa(t) \geq 0 \quad \text{lub} \quad \kappa(t) \leq 0.$$

Pewne punkty na krzywych wypukłych zasługują na szczególną uwagę.

Definicja 3.7 (Wierzchołek krzywej) *Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Mówimy, że krzywa c ma w punkcie t_0 wierzchołek, jeśli pochodna jej krzywizny w tym punkcie znika, tzn. $\dot{\kappa}(t_0) = 0$.*

Może się zdarzyć, że wierzchołków jest dużo.

Przykład 3.8 (Wierzchołki okręgu) *Każdy punkt okręgu jest jego wierzchołkiem.*

Nie może się jednak zdarzyć dla krzywych wypukłych, że jest ich bardzo mało.

Twierdzenie 3.9 (O czterech wierzchołkach) *Niech $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie wypukłą krzywą zamkniętą z parametryzacją naturalną o okresie P . Wówczas krzywa c ma co najmniej cztery wierzchołki w przedziale $[0, P)$.*

Dowód tego twierdzenia wymaga dwóch pomocniczych faktów.

Lemat 3.10 (Przecięcie krzywej wypukłej z prostą) *Jeśli krzywa zamknięta prosta przecina pewną prostą w więcej niż dwóch punktach, to część wspólna prostej i krzywej zawiera odcinek. W szczególności krzywa i prosta mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.*

Dowód. Na wykładzie □

Kolejny lemat jest infinitezymalną wersją poprzedniego.

Lemat 3.11 (Wielostyczne krzywej wypukłej) *Jeśli pewna prosta jest styczna do danej krzywej zamkniętej prostej w więcej niż jednym punkcie, to część wspólna prostej i krzywej zawiera odcinek.*

Dowód. Na wykładzie □

Dowód. twierdzenia 3.9 na wykładzie □

4 Nierówność izoperymetryczna

Ukoronowaniem teorii krzywych płaskich jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 (Nierówność izoperymetryczna) *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym krzywą zamkniętą prostą c . Niech $A[\Omega]$ oznacza powierzchnię obszaru Ω (wg. standardowej miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^2$). Wówczas*

$$4\pi A[\Omega] \leq (L[c])^2.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy Ω jest kołem.

Dowód tego twierdzenia wymaga przypomnienia pewnych faktów z rachunku różniczkowego funkcji rzeczywistych dwóch zmiennych.

Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej mówi, że dla funkcji różniczkowalnej f na przedziale $[a, b]$ zachodzi równość

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad (4)$$

Wyrażenie po prawej stronie możemy interpretować jako całkę funkcji f po (zorientowanym) brzegu przedziału $[a, b]$, przy czym orientacja zadana jest wektorem normalnym pokazującym *na zewnątrz* przedziału. W tej sytuacji wektor w punkcie b jest zgodny z orientacją osi liczbowej i dlatego $f(b)$ występuje ze znakiem plus, zaś wektor w punkcie a ma orientację przeciwną - stąd znak minus. Wzór (4) możemy zapisać jako

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx = \int_{\partial[a,b]} f(x) do, \quad (5)$$

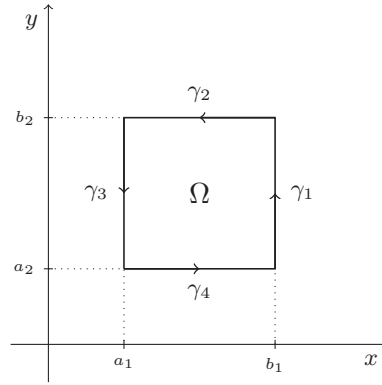
gdzie do jest miarą 0-wymiarową, czyli miarą liczącą (miara punktu równa się 1).

Chcemy uogólnić wzór (5) do sytuacji dwuwymiarowej. W tym celu zastępujemy odcinek przez prostokąt $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, a funkcję f przez pole wektorowe $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. I rozważamy najpierw

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A_2}{\partial x} ds,$$

gdzie ds jest miarą powierzchniową w $\mathbb{R}^2$. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial A_2}{\partial x} ds &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial A_2}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} A_2(b_1, y) - A_2(a_1, y) dy = \\ &= \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ A_2(b_1, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ A_2(a_1, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$



Brzegi prostokąta zostały sparametryzowane jako

$$\gamma_1 : [a_2, b_2] \ni t \rightarrow (b_1, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{oraz} \quad \gamma_3 : [-b_2, -a_2] \ni t \rightarrow (a_1, -t) \in \mathbb{R}^2.$$

Analogicznie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A_1}{\partial y} ds = - \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} A_1(b_1, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle - \int_{\gamma_4} \left\langle \begin{pmatrix} A_2(a_1, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dodając stronami oba wzory otrzymujemy

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) ds = \oint_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} A_1(x, y) \\ A_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Równoważnie, w klasycznym zapisie mamy

Twierdzenie 4.2 (Gaussa-Greena) Niech Ω będzie obszarem ograniczonym przez działami różniczkowalną krzywą c , której obraz oznaczamy przez $\partial\Omega$ i niech $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie różniczkowalnym polem wektorowym. Zachodzi równość

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) ds = \oint_{\partial\Omega} A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy. \quad (6)$$

Przy okazji prostokąt Ω został zastąpiony przez dość dowolny obszar (ograniczony krzywą zamkniętą prostą). Dowód, że jest to możliwe przez wypełnianie Ω prostokątami należy raczej do analizy i nie będziemy go tu powtarzać.

Stosując twierdzenie Gaussa-Greena do pola wektorowego $B = \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$ na Ω dostajemy

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\int_0^P \left\langle \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{c}(t) \\ \|\dot{c}(t)\| \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \|\dot{c}(t)\| dt = - \int_0^P \left\langle \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, n_c(t) \right\rangle \cdot \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Oznacza to tyle, że *przepływ* pola wektorowego $A = (A_1, A_2)^\top$ przez brzeg obszaru Ω na zewnątrz (wybór orientacji brzegu!) jest równy całce powierzchniowej z dywergencji tego pola.

To wszystko było przygotowaniem do następującego lematu, kluczowego w dowodzie nierówności izoperymetrycznej.

Lemat 4.3 (Pole obszaru ograniczonego krzywą) *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym krzywą zamkniętą prostą c . Niech $c = (c_1, c_2)^\top$ będzie parametryzacją z okresem P taką, że liczba obrotów $n_c = 1$. Wtedy*

$$A[\Omega] = - \int_0^P \dot{c}_1(t) c_2(t) dt = \int_0^P c_1(t) \dot{c}_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^P (c_1(t) \dot{c}_2(t) - \dot{c}_1(t) c_2(t)) dt.$$

Dowód. Na wykładzie □

Dowód. twierdzenia 4.1 na wykładzie. □

5 Krzywe przestrzenne

Definicja 5.1 (Krzywa przestrzenna) Krzywą przestrzenną nazywamy krzywą $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Zasadnicza różnica między krzywymi przestrzennymi a krzywymi płaskimi polega na tym, że nie ma jednoznacznie określonego wektora prostopadłego do wektora prędkości $\dot{c}(t)$. Wszystkie wektory prostopadłe do $\dot{c}(t)$ tworzą płaszczyznę, a wektory jednostkowe tworzą okrąg w tej płaszczyźnie. Jednak wśród tych wielu wektorów prostopadłych można wyróżnić pewne kierunki.

Dla krzywych płaskich mieliśmy związek (patrz: definicja 2.5)

$$\ddot{c}(t) = \kappa(t) \cdot n(t). \tag{7}$$

W szczególności zatem

$$|\kappa(t)| = \|\ddot{c}(t)\|.$$

Taką równość można rozważać w dowolnym wymiarze.

Definicja 5.2 (Krzywizna w przestrzeni) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Funkcję

$$\kappa : I \ni t \rightarrow \|\ddot{c}(t)\| \in \mathbb{R}$$

nazywamy krzywizną krzywej c .

Z dokładnością do znaku ta definicja pokrywa się z definicją 2.5. Zachowana jest w szczególności własność: $\kappa \equiv 0$ implikuje, że obraz krzywej c jest zawarty w pewnej prostej, patrz: uwaga 3.3.

Mając zdefiniowaną krzywizną możemy się posłużyć równaniem (7) do wyróżnienia kierunku normalnego, przynajmniej w tych punktach, w których krzywizna się nie zeruje.

Definicja 5.3 (Wektor normalny główny) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie takim punktem, że $\kappa(t_0) \neq 0$. Wektor

$$n(t_0) := \frac{\ddot{c}(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{\ddot{c}(t_0)}{\|\ddot{c}(t_0)\|}$$

nazywamy wektorem normalnym głównym krzywej c w punkcie t_0 .

Uwaga 5.4 (Wektor normalny jest prostopadły) Dla parametryzacji naturalnej (tak samo jak w przypadku płaskim (patrz dyskusja po uwadze 2.4)) mamy

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle,$$

co pokazuje, że $n(t_0)$ jest faktycznie prostopadły do wektora prędkości $\dot{c}(t_0)$.

Dysponując dwoma prostopadłymi wektorami jednostkowymi w $\mathbb{R}^3$ możemy je już łatwo uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Definicja 5.5 (Wektor binormalny) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie takim punktem, że $\kappa(t_0) \neq 0$. Wektor

$$b(t_0) := \dot{c}(t_0) \times n(t_0)$$

nazywamy wektorem binormalnym krzywej c w punkcie t_0 .

Jeśli $u, v \in \mathbb{R}^3$ są prostopadłymi wektorami jednostkowymi w $\mathbb{R}^3$, to wektory $u, v, u \times v$ tworzą dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 5.6 (Trójscian Freneta) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie takim punktem, że $\kappa(t_0) \neq 0$. Wektory

$$(\dot{c}(t_0), n(t_0), b(t_0))$$

nazywamy trójscianem Freneta.

Dla krzywych płaskich krzywizna mierzy odchylenie krzywej od prostej, a dokładniej mówiąc prędkość obrotu wektora prędkości w kierunku wektora normalnego. Dla krzywych przestrzennych można wprowadzić podobną wielkość mierzącą odchylenie krzywej od płaszczyzny (wyznaczonej przez wektor prędkości i wektor normalny w kierunku wektora binormalnego).

Definicja 5.7 (Skręcenie krzywej) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Niech $t_0 \in I$ będzie takim punktem, że $\kappa(t_0) \neq 0$. Niech $(\dot{c}(t_0), n(t_0), b(t_0))$ będzie trójścianem Freneta w punkcie t_0 . Liczbę

$$\tau(t_0) := \langle \dot{n}(t_0), b(t_0) \rangle$$

nazywamy skręceniem (torsją) krzywej c w punkcie t_0 .

Podobnie jak w przypadku płaskim (twierdzenie 2.7) wprowadzone wielkości są ze sobą powiązane.

Twierdzenie 5.8 (Równania Freneta w $\mathbb{R}^3$) Niech $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną i dodatnią krzywizną tj. $\kappa(t) > 0$ dla wszystkich $t \in I$. Wówczas

$$(\dot{v}(t), \dot{n}(t), \dot{b}(t)) = (v(t), n(t), b(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie jak zwykle $v(t) = \dot{c}(t)$.

Krzywizna i skręcenie determinują krzywą przestrzenną tzn. zachodzi następujący analogon zadania 13.

Twierdzenie 5.9 (Podstawowe twierdzenie o krzywych przestrzennych)

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Niech $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą funkcjami klasy C^∞ oraz niech $\kappa > 0$. Wówczas istnieje krzywa $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ z parametryzacją normalną, której krzywizna jest równa κ a skręcenie τ .

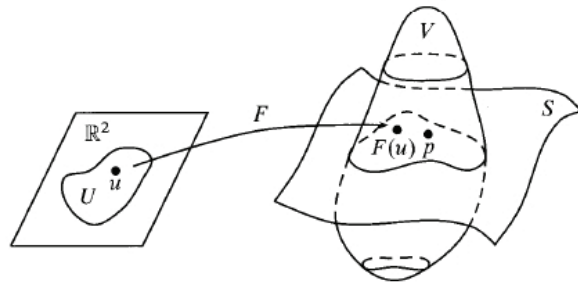
Krzywa ta jest określona jednoznacznie z dokładnością do parzystej izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (patrz: zadanie 18).

6 Powierzchnie regularne

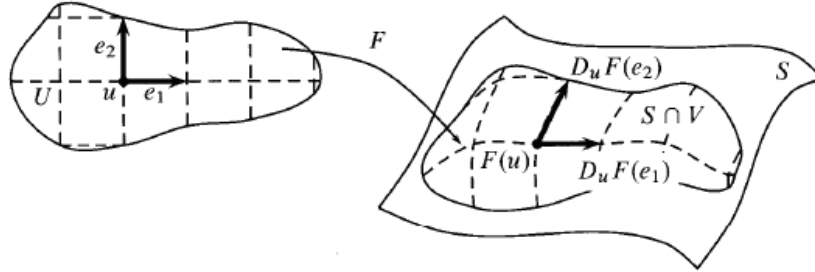
W tej części zajmujemy się powierzchniami, a konkretnie powierzchniami zanurzonymi tzn. obiektami dwuwymiarowymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. O ile definicja krzywych za pomocą parametryzacji była *globalna*, to powierzchnie zdefiniujemy *lokalnie*. Gdy poznamy ich klasyfikację, stanie się jasne, że takie podejście jest konieczne – tylko niewiele powierzchni można sparametryzować globalnie.

Definicja 6.1 (Powierzchnia w $\mathbb{R}^3$) Podzbiór $S \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy powierzchnią regularną, jeśli dla każdego punktu $p \in S$ można dobrać otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}^3$ i zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$ oraz odwzorowanie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ klasy C^∞ takie, że

- $F(U) = S \cap V$ i F jest homeomorfizmem na obraz;



- Macierz Jacobiego $D_u F$ odwzorowania F ma w każdym punkcie $u \in U$ maksymalny rząd (równy 2).



Definicja 6.2 (Mapa i lokalny układ współrzędnych) Odwzorowanie F z definicji 6.1, a dokładniej trójkę (U, F, V) , nazywamy lokalną parametryzacją powierzchni S w otoczeniu punktu p (lub krótko mapą). Współrzędne punktu $u = (u_1, u_2)$ nazywamy lokalnymi współrzędnymi punktu $F(u) \in S$ w mapie F .

Przykład 6.3 (Płaszczyzna afiniczna) Niech $p \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, a $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ustalonymi liniowo niezależnymi wektorami. Zbiór

$$S = \left\{ p + u_1 X + u_2 Y : (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

jest płaszczyzną afiniczną.

W tej sytuacji mamy do czynienia z parametryzacją globalną

$$F : \mathbb{R}^2 \ni (u_1, u_2)^\top \rightarrow p + u_1 X + u_2 Y \in \mathbb{R}^3.$$

Przykład 6.4 (Wykres funkcji regularnej) Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, a $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją klasy C^∞ . Wykres takiej funkcji

$$S = \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^\top \in U, z = f(x, y) \right\}$$

jest powierzchnią regularną z parametryzacją globalną

$$F : U \ni (x, y)^\top \rightarrow (x, y, f(x, y))^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Przykład 6.5 (Sfera jednostkowa) Sfera jednostkowa

$$S = S^2 = \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

jest powierzchnią regularną.

W rozważanym przykładzie sfera zadana jest przez jedno równanie. Wiele powierzchni w $\mathbb{R}^3$ opisanych jest równaniami. Z tego względu wygodnie jest mieć kryterium kiedy zbiór miejsc zerowych pewnej funkcji (czyli zbiór rozwiązań pewnego równania) jest powierzchnią regularną.

Twierdzenie 6.6 (Kryterium regularności zbioru miejsc zerowych) Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ . Zbiór

$$S = \left\{ (x, y, z)^\top \in V : f(x, y, z) = 0 \right\}$$

jest powierzchnią regularną, jeśli $(\text{grad } f)(p) \neq 0$ dla każdego punktu $p \in S$.

Dowód. Na wykładzie □

Przykład 6.7 (Elipsoida) Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera. Zbiór

$$S = \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

nazywamy elipsoidą.

Ten zbiór jest powierzchnią regularną, gdyż dla $V = \mathbb{R}^3$ i

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)^\top \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \in \mathbb{R}$$

mamy

$$S = \left\{ (x, y, z)^\top \in V : f(x, y, z) = 0 \right\}$$

oraz

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = 2 \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)^\top.$$

Gradient znika tylko w punkcie $p_0 = (0, 0, 0)^\top$, ale punkt p_0 nie należy do zbioru S .

Uwaga 6.8 (Nie znikanie gradientu i regularność) Nie znikanie gradientu funkcji $f(x, y, z)$ jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym regularności zbioru miejsc zerowych równania $f(x, y, z) = 0$. Na przykład sfera jednostkowa opisana jest też równaniem

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0,$$

którego gradient znika w każdym punkcie.

Przykład 6.9 (Punkt osobliwy) Stożek

$$S = \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \right\}$$

nie jest powierzchnią regularną.

Dla funkcji

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)^\top \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$$

mamy

$$(\text{grad } f)(x, y, z)^\top = 2(x, y, -z)^\top,$$

a zatem gradient znika w punkcie $p_0 = (0, 0, 0)$, który należy do stożka. Z uwagi 6.8 wynika, że punkt p_0 może być regularny (bo być może trzeba wybrać opis stożka innym równaniem). Fakt, że tak nie jest, tzn., że p_0 jest punktem osobliwym wymaga osobnego dowodu. Poznamy go na wykładzie.

Mając obiekty: powierzchnie, rozważamy morfizmy między nimi: odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Twierdzenie 6.10 (Różniczkowalność odwzorowań z i na powierzchnie)

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną. Niech (U, F, V) będzie lokalną parametryzacją S . Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem, którego obraz leży w obrazie F tzn. $\varphi(W) \subset S \cap V$. Następujące warunki są równoważne:

- i) odwzorowanie $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest klasy C^∞ ;
- ii) złożenie $F^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ jest klasy C^∞ .

Dowód. Na wykładzie □

Wniosek 6.11 (Dyfeomorficzność zmiany parametryzacji) *Jeśli (U_1, F_1, V_1) i (U_2, F_2, V_2) są lokalnymi mapami na regularnej powierzchni S , to złożenie*

$$F_2^{-1} \circ F_1 : \mathbb{R}^2 \supset F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^2$$

jest dyfeomorfizmem.

Twierdzenie 6.12 (Charakteryzacja różniczkowalności odwzorowań)

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną, $p \in S$ ustalonym punktem. Dla odwzorowania $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ następujące warunki są równoważne:

- a) *istnieje otwarte otoczenie V punktu p w $\mathbb{R}^3$ oraz rozszerzenie $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^∞ w p takie, że $\tilde{f}|_{S \cap V} = f|_{S \cap V}$;*
- b) *istnieje lokalna parametryzacja (U, F, V) z $p \in V$ taka, że złożenie $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^∞ w punkcie $F^{-1}(p)$;*
- c) *dla wszystkich lokalnych parametryzacji (U, F, V) z $p \in V$ złożenie $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^∞ w punkcie $F^{-1}(p)$.*

Dowód. Na wykładzie □

Definicja 6.13 (Różniczkowalność odwzorowania na powierzchni)

Mówimy, że odwzorowanie $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^∞ w punkcie $p \in S$, jeśli jest spełniony jeden (każdy) z warunków w poprzednim twierdzeniu.

Ta definicja pozwala nam na zdefiniowanie odwzorowań regularnych między powierzchniami.

Definicja 6.14 (Różniczkowalność odwzorowania między powierzchniami)

Niech $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami regularnymi. Mówimy, że odwzorowanie $f : S_1 \rightarrow S_2$ jest klasy C^∞ w punkcie $p \in S_1$, jeśli istnieją lokalne parametryzacje (U_1, F_1, V_1) z $p \in V_1$ i (U_2, F_2, V_2) z $f(p) \in V_2$ takie, że złożenie

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

jest klasy C^∞ w p .

Oczywiście ta definicja ma sens tylko wtedy, gdy różniczkowalność odwzorowania f nie zależy od wyboru lokalnych parametryzacji.

Z punktu widzenia geometrii różniczkowej pewne powierzchnie są nierozróżnialne.

Definicja 6.15 (Dyfeomorfizmy powierzchni) *Odwzorowanie $f : S_1 \rightarrow S_2$ powierzchni regularnych w $\mathbb{R}^3$ nazywamy dyfeomorfizmem, jeśli f jest bijekcją oraz f i f^{-1} są klasy C^∞ .*

Dwie powierzchnie nazywamy dyfeomorficznymi, jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm.

7 Płaszczyzna styczna

Ważnym niezmiennikiem związanym z rozmaitością zanurzoną jest przestrzeń styczna.

Definicja 7.1 (Płaszczyzna styczna) Niech $p \in S$ będzie punktem na regularnej powierzchni S w $\mathbb{R}^3$. Zbiór

$$T_p S := \{X \in \mathbb{R}^3 : \text{istnieje } \varepsilon > 0 \text{ i regularna krzywa } c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ taka, że} \\ c(0) = p \text{ i } \dot{c}(0) = X\}$$

nazywamy płaszczyzną styczną do S w punkcie p .

Elementy płaszczyzny stycznej X nazywamy wektorami stycznymi.

Z tej definicji nie od razu widać, że $T_p S$ jest rzeczywiście płaszczyzną.

Twierdzenie 7.2 (Płaszczyzna styczna a różniczka) Niech $p \in S$ będzie punktem na regularnej powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ i niech (U, F, V) będzie lokalnym układem współrzędnych wokół p . Niech $u_0 = F^{-1}(p)$. Wówczas

$$T_p S = \text{im}(D_{u_0} F) = (D_{u_0} F)(\mathbb{R}^2).$$

Dowód. Na wykładzie

□

Wniosek 7.3 (Płaszczyzna styczna jest płaszczyzną) Różniczka $D_{u_0} F$ ma maksymalny rząd równy 2, więc jej obraz $T_p S$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga 7.4 (Afiniczna płaszczyzna styczna) Płaszczyzna styczna określona w definicji 7.1 przechodzi przez punkt $(0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ (jest podprzestrzenią wektorową). Do zobrazowania płaszczyzny stycznej wygodnie jest posługiwać się płaszczyzną afiniczną $p + T_p S$, która przechodzi przez $p \in S$.

Dla powierzchni wyznaczonych równaniem łatwo można podać opis płaszczyzny stycznej.

Twierdzenie 7.5 (Płaszczyzna styczna i gradient) Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, niech $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ i niech $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią opisaną równaniem $f = 0$. Załóżmy ponadto, że gradient funkcji f nie znika w żadnym punkcie $p \in S$. Wówczas gradient wyznacza płaszczyznę styczną jako dopełnienie ortogonalne

$$T_p S = (\text{grad } f)(p)^\perp.$$

Dowód. Na wykładzie

□

Przestrzeń styczna jest liniowym przybliżeniem rozmaitości, a różniczka jest liniowym przybliżeniem odwzorowania. Połączenie tych dwóch idei prowadzi do następującej definicji.

Definicja 7.6 (Różniczka) Niech $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami regularnymi i niech $f : S_1 \rightarrow S_2$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^\infty$. Niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem. Różniczką odwzorowania f w punkcie p nazywamy odwzorowanie

$$d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

takie, że dla $X \in T_p S_1$ danego przez krzywą $c : I \rightarrow S_1$ jak w definicji 7.1 kładziemy

$$d_p f(X) := \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2.$$

Trzeba jeszcze pokazać, że definicja jest dobrze postawiona.

Twierdzenie 7.7 (Różniczka jest dobrze określona) Odwzorowanie zadane w definicji 7.6 nie zależy wyboru krzywej c zadającej wektor X . Ponadto odwzorowanie $d_p f$ jest liniowe.

Dowód. Na wykładzie □

Uwaga 7.8 (Lokalna postać różniczki) Z dowodu wynika, że różniczka odwzorowania f jest zadana w lokalnych współrzędnych (U_1, F_1, V_1) na S_1 i (U_2, F_2, V_2) na S_2 przez macierz Jacobiego odwzorowania $\tilde{f} = F_2^{-1} \circ f \circ F_1$. Wyraża to przemienność następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} S_2 \\ \uparrow D_{u_0} F_1 & & \uparrow D_{\tilde{f}(u_0)} F_2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D_{u_0} \tilde{f}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

8 Pierwsza forma fundamentalna

Chcąc badać geometrię powierzchni regularnych wygodnie jest dysponować narzędziem pozwalającym na określanie długości krzywych na tej powierzchni, kątów między nimi itp. Dla powierzchni zanurzonych $S \subset \mathbb{R}^3$, takich jakie rozpatrujemy na tym wykładzie, określenie takiego narzędzia jest bardzo łatwe: wystarczy zawęzić iloczyn skalarny z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ do płaszczyzn stycznych $T_p S$. W każdej z tych płaszczyzn otrzymujemy w ten sposób iloczyn skalarny.

Definicja 8.1 (Pierwsza forma fundamentalna) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną. Dla każdego punktu $p \in S$ definiujemy

$$g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S \times T_p S}.$$

Odwzorowanie $I : S \ni p \rightarrow g_p \in \text{Sym}^2 T_p^* S$ nazywamy pierwszą formą fundamentalną powierzchni S .

Iloczyn skalarny jest dodatnio określoną dwuliniową formą symetryczną i jako taki może być przedstawiony za pomocą macierzy Grama. W lokalnych współrzędnych (U, F, V) naturalne wydaje się wybranie wektorów

$$(D_u F)(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) \quad \text{oraz} \quad (D_u F)(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$$

jako bazy w przestrzeni $T_p S$ (tutaj: $u = F^{-1}(p)$ a e_1 i e_2 są wektorami bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^2 \supset U$). Współczynniki macierzy Gramma $g_{ij}(u)$ w punkcie $p = F(u)$ wyrażają się wzorem

$$g_{ij}(u) := g_p((D_u F)(e_i), (D_u F)(e_j)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\rangle.$$

Macierz symetryczna

$$G(u) = (g_{ij}(u))_{i,j=1,2}$$

zależy w sposób $\mathcal{C}^\infty$ od punktu u (tzn. współczynniki $g_{ij}(u)$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty$ na U).

To może wydawać się nieco abstrakcyjne, zostanie jednak na wykładzie zobrazowane seria przykładów.

Uwaga 8.2 (Zależność od wyboru lokalnej parametryzacji) Pokażemy na przykładzie, że prezentacja g_p za pomocą macierzy Gramma zależy od wyboru lokalnego układu współrzędnych. Sam iloczyn skalarny g_p od tego wyboru **nie zależy**, bo jest dany przez iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$!

9 Pole wektorowe normalne i orientowalność

Dysponując płaszczyznami stycznymi możemy w naturalny sposób zdefiniować *kierunek normalny* w punkcie $p \in S$ powierzchni regularnej S jako wyznaczony przez dopełnienie ortogonalne płaszczyzny stycznej. Te wszystkie kierunki zebrane w rodzinę parametryzowaną punktami powierzchni S tworzą *wiązkę normalną*.

Definicja 9.1 (Pole wektorów normalnych) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną. Polem wektorów normalnych na S nazywamy odwzorowanie

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

takie, że dla każdego punktu $p \in S$ spełniony jest warunek $N(p) \perp T_p S$.

Pole wektorów normalnych nazywamy unormowanym (jednostkowym), jeśli ponadto $\|N(p)\| = 1$ dla wszystkich $p \in S$.

Oczywiście jeśli dane jest pole N , to pole $-N$ też jest polem wektorów normalnych. Dla nas interesujące jest istnienie pola wektorów normalnych klasy $\mathcal{C}^\infty$. Takie pole może nie istnieć! Zależy to od *orientowalności* powierzchni.

Definicja 9.2 (Orientowalność) Powierzchnia regularna $S \subset \mathbb{R}^3$ jest orientowalna, jeśli istnieje na niej pole wektorów normalnych klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Uwaga 9.3 (Regularność pola wektorów normalnych) Może się to wydać zaskakujące, ale w poprzedniej definicji wystarczy wymagać *ciągłości* pola wektorów normalnych. Na powierzchniach regularnych ciągłość takiego pola implikuje różniczkowalność!

Mamy następującą charakteryzację powierzchni orientowalnych za pomocą map lokalnych.

Twierdzenie 9.4 (Orientowalność a pokrycie mapami) *Powierzchnia regularna $S \subset \mathbb{R}^3$ jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie jej pokrycie lokalnymi parametryzacjami $(U_\alpha, F_\alpha, V_\alpha)$, że każda zmiana parametryzacji (jak we Wniosku 6.11) ma dodatni wyznacznik różniczkowy*

$$\det(D(F_\beta^{-1} \circ F_\alpha)) > 0.$$

Dowód. Na wykładzie □

10 Druga forma fundamentalna

Jednostkowe pole wektorowe normalne $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ można rozważać jako odwzorowanie między powierzchniami: S i sferą jednostkową $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. W tym ujęciu N nazywane jest też *odwzorowaniem Gaussa*. Dla ustalonego punktu $p \in S$ różniczka odwzorowania N

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$$

po utożsamieniu $T_{N(p)} S^2 = N(p)^\perp = T_p S$, może być traktowana jak endomorfizm przestrzeni $T_p S$.

Definicja 10.1 (Odwzorowanie Weingartena) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną z orientacją zadaną przez jednostkowe pole wektorów normalnych N . Endomorfizm $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ zadany wzorem*

$$W_p(X) = -d_p N(X)$$

nazywamy odwzorowaniem Weingartena.

Znak minus pojawiający się w definicji odwzorowania Weingartena ma historyczne powody. Zmiana orientacji na S (z N na $-N$) zmienia też znak odwzorowania W_p .

Twierdzenie 10.2 (Samosprężenie W_p) *Endomorfizm W_p płaszczyzny stycznej $T_p S$ jest samosprężony względem pierwszej formy fundamentalnej I_p .*

Dowód. Na wykładzie □

Jak wiadomo (miejmy nadzieję) z algebry liniowej samosprężone endomorfizmy przestrzeni euklidesowej odpowiadają wzajemnie jednoznacznie symetrycznym formom dwuliniowym. Dla przypomnienia: Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i niech $W : V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem samosprężonym tzn. takim, że

$$\langle W(u), v \rangle = \langle u, W(v) \rangle$$

dla każdej pary wektorów $u, v \in V$. Odwzorowanie $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$\beta(u, v) := \langle W(u), v \rangle$$

jest dwuliniową formą symetryczną na V . W odniesieniu do formy zdefiniowanej odwzorowaniem Weingartena mamy następującą definicję.

Definicja 10.3 (Druga forma fundamentalna) *Odwzorowanie Weingartena zadaje formę dwuliniową*

$$II_p : T_p \times T_p \ni (X, Y) \rightarrow I_p(W_p(X), Y) \in \mathbb{R}$$

zwaną drugą formą fundamentalną powierzchni S w punkcie p .

11 Krzywizna normalna

W odniesieniu do powierzchni można określić kilka pojęć uogólniających krzywiznę poznaną dla krzywych, patrz definicje 2.5 i 5.2. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie orientowaną powierzchnią regularną z jednostkowym polem wektorów normalnych N . Niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem powierzchni S i niech $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną taką, że $p = c(0)$. Krzywa c jest w szczególności krzywą przestrzenną i ma krzywiznę $\kappa_c(0)$ określoną w definicji 5.2. Jeśli $\kappa_c(0) \neq 0$, to równanie

$$\ddot{c}(0) = \kappa_c(0) \cdot n_c(0),$$

określa wektor normalny główny $n_c(0)$ do krzywej c w punkcie $p = c(0)$, patrz definicja 5.3. Ten wektor możemy zapisać jako

$$n_c(0) = n_c(0)^{tang} + n_c(0)^{perp},$$

sumę wektora $n_c(0)^{tang}$ stycznego do powierzchni S i $n_c(0)^{perp}$ normalnego do S . Mamy przy tym $n_c(0)^{perp} = \langle n_c(0), N(p) \rangle \cdot N(p)$. Zatem

$$\ddot{c}(0) = \kappa_c(0) \cdot n_c(0)^{tang} + \kappa_c(0) \cdot \langle n_c(0), N(p) \rangle \cdot N(p).$$

Ten związek pozwala nam zdefiniować *krzywiznę normalną* powierzchni S w $\mathbb{R}^3$.

Definicja 11.1 (Krzywizna normalna) Przy oznaczeniach jak powyżej, liczbę

$$\kappa_{nor} := \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \kappa_c(0) \cdot \langle n_c(0), N(p) \rangle & \text{dla } \kappa_c(0) \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \kappa_c(0) = 0. \end{cases}$$

nazywamy *krzywizną normalną powierzchni S w punkcie p w kierunku wektora $\dot{c}(0)$* .

Oznaczając przez ϑ kąt między wektorami $N(p)$ i $n_c(0)$, mamy

$$\kappa_{nor} = \kappa_c(0) \cdot \cos \vartheta.$$

W szczególności wynika stąd oszacowanie

$$|\kappa_{nor}| \leq \kappa_c(0).$$

Krzywizna normalna związana jest z drugą formą fundamentalną.

Twierdzenie 11.2 (Meusnier) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie orientowaną powierzchnią regularną z polem wektorowym normalnym N i drugą formą fundamentalną II . Niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem powierzchni S i niech $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną taką, że $p = c(0)$. Wówczas

$$\kappa_{nor} = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0)).$$

W szczególności wszystkie krzywe z parametryzacją naturalną zawarte w S i przechodzące przez p z ustalonym wektorem stycznym zadają tą samą krzywiznę normalną.

Dowód. Na wykładzie □

Uwaga 11.3 (Zmiana krzywizny przy zmianie orientacji) Zmiana orientacji krzywej nie zmienia wartości krzywizny normalnej

$$II(-\dot{c}(0), -\dot{c}(0)) = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0)).$$

Natomiast zmiana orientacji powierzchni S , tzn. zastąpienie N przez $-N$ zmienia znak κ_{nor} :

$$\langle \ddot{c}(0), -N(p) \rangle = -\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle.$$

12 Lokalne własności powierzchni

Odwzorowanie Weingartena $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ jest odwzorowaniem samosprężonym, tzn. jego macierz w dowolnej bazie w płaszczyźnie stycznej $T_p S$ jest symetryczna. Każdą taką macierz można (jak wiadomo z algebry liniowej) zdiagonalizować. To znaczy, że istnieje baza ortonormalna X_1, X_2 płaszczyzny stycznej $T_p S$ składająca się z wektorów własnych odwzorowania W_p . W tej bazie mamy

$$W_p(X_i) = \kappa_i(p) \cdot X_i \quad \text{dla } i = 1, 2$$

dla wartości własnych $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$.

Definicja 12.1 (Krzywizny główne) *Niech S będzie zorientowaną powierzchnią regularną w $\mathbb{R}^3$ i niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem. Wartości własne κ_1, κ_2 odwzorowania Weingartena W_p nazywamy krzywiznami głównymi powierzchni S w punkcie p . Kierunki wyznaczone przez wektory własne X_1 i X_2 nazywamy kierunkami krzywizn głównych.*

W dalszej części wykładu zakładamy, że $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Dowolny wektor jednostkowy X w płaszczyźnie stycznej $T_p S$ możemy w bazie X_1, X_2 zapisać w postaci

$$X = \cos(\varphi) \cdot X_1 + \sin(\varphi) \cdot X_2 \quad (8)$$

dla pewnej liczby rzeczywistej $\varphi \in [0, 2\pi)$. Podstawiając równanie (8) do II formy fundamentalnej otrzymujemy

$$II(X, X) = \cos^2(\varphi) \cdot \kappa_1 + \sin^2(\varphi) \cdot \kappa_2.$$

Z tej zależności natychmiast wynika, że krzywizna normalna powierzchni S w punkcie p w kierunku dowolnego wektora stycznego mieści się w przedziale $[\kappa_1, \kappa_2]$.

Definicja 12.2 (Linia krzywizny) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną i niech $c : I \rightarrow S$ będzie krzywą z parametryzacją naturalną. Jeśli $\dot{c}(t)$ jest kierunkiem krzywizny głównej dla wszystkich $t \in I$, to krzywą c nazywamy linią krzywizny.*

Krzywizny główne można uśredniać na wiele sposobów.

Definicja 12.3 (Krzywizny Gaussa i średnia) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie regularną powierzchnią orientowalną i niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem z krzywiznami głównymi κ_1 i κ_2 . Liczbę*

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

nazywamy krzywizną Gaussa powierzchni S w punkcie p . Natomiast liczbę

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{trace}(W_p)$$

nazywamy średnią krzywizną powierzchni S w punkcie p .

Tych niezmienników możemy użyć do wyróżnienia różnych rodzajów punktów na powierzchniach.

Definicja 12.4 (Typy punktów na powierzchniach) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie regularną powierzchnią orientowalną i niech $p \in S$ będzie ustalonym punktem. Mówimy, że punkt p jest

- i) eliptyczny, jeśli $K(p) > 0$;
- ii) hiperboliczny, jeśli $K(p) < 0$;
- iii) paraboliczny, jeśli $K(p) = 0$ ale $W_p \neq 0$ tzn. gdy jedna krzywizna główna jest równa zero, druga natomiast jest różna od zera;
- iv) płaski, jeśli $W_p = 0$ tzn. $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Druga forma fundamentalna zawiera informacje o tym jak bardzo powierzchnia różni się lokalnie od płaszczyzny stycznej.

Twierdzenie 12.5 Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną, p ustalonym punktem powierzchni S , a wektory X_1, X_2 bazą ortonormalną płaszczyzny stycznej $T_p S$. Niech N będzie jednostkowym polem wektorowym normalnym takim, że wektory $(X_1, X_2, N(p))$ tworzą dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną $\mathbb{R}^3$. Istnieje lokalna parametryzacja (U, F, V) powierzchni S wokół punktu p taka, że

- i) $(0, 0) \in U$ i $F(0, 0) = p$;
- ii) $g_{ij} = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, 2$;
- iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, 0) = 0$ dla $i, j, k = 1, 2$;
- iv) $F(u) - p = u^1 \cdot X_1 + u^2 \cdot X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(0, 0) u^i u^j \cdot N(p) + O(\|u\|^3)$.

Macierze (g_{ij}) i (h_{ij}) są przy tym lokalnymi prezentacjami pierwszej i drugiej formy fundamentalnej w parametryzacji (U, F, V) .

Dowód. Na wykładzie □

Wniosek 12.6 (Lokalne przedstawienie powierzchni jako wykres) Każda powierzchnia regularna S jest lokalnie wykresem pewnej funkcji regularnej nad afiniczną powierzchnią styczną $p + T_p S$.

Dowód. Na wykładzie □

12.1 Geometryczna interpretacja krzywizny Gaussa

Z wniosku 12.6 wynika możliwość lokalnej aproksymacji powierzchni w danym punkcie powierzchniami stopnia 2 danymi przez wykres funkcji

$$(u_1, u_2) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(0, 0) u_i u_j.$$

Przypadek I. $K(p) > 0$.

W tej sytuacji macierz $(h_{ij}(0, 0))$ jest dodatnio lub ujemnie określona i możemy o S myśleć w pobliżu punktu p jak o paraboloidzie

$$z = x^2 + y^2.$$

Przypadek II. $K(p) < 0$.

W tej sytuacji macierz $(h_{ij}(0,0))$ nie jest określona i nie jest zdegenerowana. Powierzchnia S wygląda w pobliżu punktu p jak powierzchnia siodłowa

$$z = xy.$$

Przypadek III. Punkt p jest paraboliczny.

W tej sytuacji macierz $(h_{ij}(0,0))$ jest zdegenerowana, ale nie jest równa zero. W pobliżu p , powierzchnię S przybliża walec nad parabolą

$$z = x^2.$$

Przypadek IV. Punkt p jest płaski.

Macierz $(h_{ij}(0,0))$ jest równa 0. Powierzchnię do rzędu 3 przybliża płaszczyzna styczna

$$z = 0.$$

Krzywizna Gaussa jest związana ze zwartością powierzchni.

Twierdzenie 12.7 (Powierzchnia zwarta zawiera punkt eliptyczny) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie zwartą powierzchnią regularną. Wówczas istnieje co najmniej jeden punkt $p \in S$ taki, że $K(p) > 0$.*

Dowód. Na wykładzie □

Wniosek 12.8 (Rzut prostopadły minimalizuje odległość) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną, $q \in \mathbb{R}^3$ dowolnym punktem i $p \in S$ punktem na S , który leży najbliżej q . Wówczas*

$$\mathbb{R} \cdot (q - p) \perp T_p S.$$

13 Całkowanie na powierzchniach

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną i niech (U, F, V) będzie lokalną parametryzacją. Najpierw rozważymy funkcje $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, które poza mapą lokalną tzn. poza V są równe zero.

Definicja 13.1 (Funkcja lokalnie całkowalna) *Funkcję $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f|_{(S \setminus V)} \equiv 0$ nazywamy całkowalną w sensie Lebesgue'a, jeśli funkcja*

$$U \ni (u_1, u_2) \rightarrow f(F(u_1, u_2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u_1, u_2))}$$

jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.

Wartością całki jest liczba

$$\int_S f dA := \int_U f(F(u_1, u_2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u_1, u_2))} du_1 du_2. \quad (9)$$

Wyrażenie

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u_1, u_2))} du_1 du_2$$

nazywamy elementem powierzchni.

Oczywiście mówienie o wartości całki nie miałoby sensu, gdyby wyrażenie (9) zależało od parametryzacji. Tak nie jest dzięki czynnikowi $\sqrt{\det(g_{ij}(u_1, u_2))}$, który może się wydawać nienaturalny na pierwszy rzut oka.

Lemat 13.2 (Niezależność całki od parametryzacji) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną i niech (U_i, F_i, V_i) dla $i = 1, 2$ będą lokalnymi parametryzacjami powierzchni S . Niech $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f|_{(S \setminus (V_1 \cap V_2))} \equiv 0$. Funkcja*

$$(f \circ F_1) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}))} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja

$$(f \circ F_2) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{(2)}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}))} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

ma tą własność. Ponadto w tej sytuacji

$$\begin{aligned} \int_{U_1} f(F_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}))} du_1^{(1)} du_2^{(1)} = \\ \int_{U_2} f(F_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)})) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{(2)}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}))} du_1^{(2)} du_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Przejsie od lokalnej do globalnej całkowalności jest łatwe, dzięki temu, że powierzchnie, które rozważamy są zanurzone w $\mathbb{R}^3$ i jako takie zawsze dają się pokryć skończoną ilością parametryzacji lokalnych.

Definicja 13.3 (Funkcja globalnie całkowalna) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną. Funkcja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna, jeśli istnieje rozkład*

$$f = f_1 + \dots + f_k$$

na skończoną sumę funkcji lokalnie całkowalnych.

Uwaga, jeśli znajdziemy rozkład jak w definicji, w którym jedna lub więcej funkcji f_i nie jest lokalnie całkowalna, to jeszcze nie można wnioskować, że f nie jest całkowalna. Definicja nie wymaga bowiem całkowalności dowolnego rozkładu skończonego.

Definicja 13.4 (Pole powierzchni) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną. Jeśli funkcja stała 1 na S jest całkowalna, to liczbę*

$$A[S] = \int_S dA$$

nazywamy polem powierzchni S .

14 Powierzchnie kreślne

W tej części rozważymy powierzchnie, które mogą być pokryte prostymi.

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie otwartym odcinkiem i $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krzywą przestrzenną. Niech $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem regularnym takim, że $v(t) \neq (0, 0, 0)^\top$ dla wszystkich $t \in I$. Niech $J \subset \mathbb{R}$ będzie innym odcinkiem otwartym. Rozważamy parametryzację

$$F : I \times J \ni (t, s) \rightarrow c(t) + sv(t) \in \mathbb{R}^3. \quad (10)$$

Jej różniczka jest macierzą

$$D_{(t,s)}F = (\dot{c}(t) + s\dot{v}(t), v(t)).$$

Jeśli wektory $\dot{c}(t)$ i $v(t)$ są liniowo niezależne, to rząd macierzy $D_{(t,0)}F$ jest maksymalny (tzn. równy 2) w każdym punkcie $(t, 0)$. A zatem istnieje otwarte otoczenie U zbioru $I \times \{0\} \subset I \times J$ takie, że (U, F, S) jest parametryzacją regularnej powierzchni $S = F(U)$.

Definicja 14.1 (Powierzchnia kreślna) *Powierzchnię regularną $S \subset \mathbb{R}^3$, którą można pokryć lokalnymi mapami postaci (10) nazywamy powierzchnią kreślną.*

Podobnie jak w przypadku powierzchni zwartych (twierdzenie 12.7), krzywizna Gaussa podlega pewnym ograniczeniom.

Twierdzenie 14.2 (Krzywizna Gaussa powierzchni kreślnych) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią kreślną. Wówczas*

$$K(p) \leq 0$$

dla wszystkich $p \in S$.

W szczególności powierzchnia kreślna w $\mathbb{R}^3$ nie może być zwarta.

15 Powierzchnie minimalne

W ostatnim wykładzie rozważymy powierzchnie minimalizujące powierzchnię.

Definicja 15.1 (Pole krzywizny) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną (niekoniecznie orientowalną) i niech N będzie polem wektorów normalnych (niekoniecznie regularnym). Polem krzywizny nazywamy pole wektorowe*

$$\mathcal{H}(p) := H(p) \cdot N(p),$$

gdzie $H(p)$ oznacza jak zwykle krzywiznę średnią (patrz definicja 12.3).

Poniższe twierdzenie opisuje zmianę pola powierzchni pod wpływem deformacji.

Twierdzenie 15.2 (Zmiana pola powierzchni przy deformacji) *Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną ze skończonym polem. Niech $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularnym polem wektorów normalnych z nośnikiem zwartym (tzn. poza*

pewnym zwartym podzbiorem S , pole Φ jest równe zero).
 Dla dostatecznie małych wielkości t , zbiór

$$S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$$

jest powierzchnią regularną o skończonym polu, oraz zachodzi równość

$$\frac{d}{dt}A[S_t]|_{t=0} = -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Dowód. Na wykładzie □

Wniosek 15.3 (Powierzchnie minimalizujące pole) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną ze zwartym domknięciem $\bar{S}$. Jeśli S ma minimalną powierzchnię wśród wszystkich powierzchni $\tilde{S}$ o tym samym brzegu, tzn.

$$\partial \tilde{S} = \bar{\tilde{S}} \setminus \tilde{S} = \bar{S} \setminus S = \partial S,$$

to pole krzywizny S jest zerowe, tzn.

$$\mathcal{H}(p) = (0, 0, 0)^\top$$

dla wszystkich $p \in S$.

Dowód. Na wykładzie □

Własność opisana we wniosku prowadzi do następującej definicji.

Definicja 15.4 (Powierzchnia minimalna) Mówimy, że powierzchnia $S \subset \mathbb{R}^3$ jest minimalna, jeśli

$$\mathcal{H}(p) = (0, 0, 0)^\top$$

dla wszystkich $p \in S$.

Sformułowanie wniosku nasuwa następujący problem: mając daną zamkniętą krzywą przestrzenną c , wyznaczyć powierzchnię regularną S taką, że $c = \partial S$ i S ma minimalne pole, wśród wszystkich powierzchni tego typu. Problem ten jest znany jako *problem Plateau* (od nazwiska belgijskiego fizyka). Krzywizna Gaussa powierzchni minimalnych podlega pewnym ograniczeniom.

Twierdzenie 15.5 (Krzywizna Gaussa powierzchni minimalnych) Dla każdej powierzchni regularnej mamy

$$K(p) \leq H(p)^2.$$

W szczególności, krzywizna Gaussa powierzchni minimalnej spełnia warunek

$$K(p) \leq 0,$$

dla wszystkich punktów p tej powierzchni.

Dowód. Na wykładzie □

Wniosek 15.6 Powierzchnie minimalne nie są zwarte.

Istnieje jeszcze wiele ciekawych rodzajów powierzchni, np. powierzchnie obrotowe. Istnieje wiele ciekawych własności powierzchni *abstrakcyjnych* tzn. nie związanych z żadnym konkretnym zanurzeniem w przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$. Na tym wykładzie nie zdażyłem o nich opowiedzieć. Może uda się to kiedy indziej.