

Zadanie 1 (10P):

Wyznacz zakres w jakim zmienia się krzywizna krzywej płaskiej będącej wykresem funkcji

$$f(x) = x^2.$$

Mamy parametryzację $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ i wobec tego

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z zadania 5 dostajemy

$$\kappa(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{pmatrix}}{(1 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

Mamy

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \kappa(t) = 0.$$

Ponadto $\kappa(t)$ jest dodatnia i osiąga maksimum, gdy mianownik jest najmniejszy, czyli wtedy, gdy funkcja kwadratowa $1 + 4t^2$ ma najmniejszą wartość. A tak dzieje się dla $t = 0$. Mamy

$$\kappa(0) = 2$$

i ostatecznie: krzywizna przyjmuje wartości z przedziału $(0, 2]$.

Zadanie 2 (10P):

Wyznacz okrąg ściśle styczny do paraboli

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases}$$

w punkcie p odpowiadającym wartości parametru $t = 0$.

Wiemy z poprzedniego zadania, że $\kappa_c(0) = 2$. Wektor styczny to $\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, zatem dla wektora normalnego mamy

$$n_c(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z formułą z zadania 10 mamy dla środka P_0 okręgu ściśle stycznego

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad r_0 = \frac{1}{2},$$

gdzie r_0 oznacza promień okręgu ściśle stycznego.

Zadanie 3 (10P):

Wyznacz trójszkie Freneta krzywej

$$c(t) = (t, \sin(t), \sin^2(t))$$

w punkcie $c(0)$.

Uwaga: wszystkie wektory powinny mieć długość jeden!

Obliczamy najpierw

$$\dot{c}(t) = (1, \cos(t), \sin(2t)) \text{ i } \ddot{c}(t) = (0, \sin(t), 2\cos(2t)).$$

Pierwszy wektor w trójszkie Freneta to wektor styczny

$$\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

unormujemy go na końcu.

Formalnie powinniśmy teraz różniczkować w zerze jednostkowe pole wektorów stycznych $\frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$, ale możemy spróbować od razu drugą pochodną

$$\ddot{c}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mamy szczęście! Ten wektor jest prostopadły do pierwszego obliczonego wektora, więc po unormowaniu otrzymamy z niego wektor normalny główny $n_c(0)$.

Pozostało obliczyć wektor binormalny

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po unormowaniu dostajemy trójszkie Freneta w punkcie $c(0)$:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4 (10P):

Na powierzchni z parametryzacją

$$F : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \ni (t, s) \rightarrow \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

krzywa c jest obrazem prostej $s = 3t$. Wyznacz krzywiznę normalną wzdłuż tej krzywej.

To zadanie było rachunkowe, ale chyba jednak trochę zbyt trudne na egzamin, postępowałem więc tak, jakby było warte tylko 6 punktów.

Obraz prostej danej równaniem $s = 3t$ ma parametryzację

$$c(t) = \begin{pmatrix} 3t \cos(t) \\ 3t \sin(t) \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Obliczamy najpierw

$$\dot{c}(t) = 3 \begin{pmatrix} \cos(t) - t \sin(t) \\ \sin(t) + t \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \|\dot{c}(t)\| = 3\sqrt{t^2 + 2}.$$

Eliminując z parametryzacji powierzchni zmienne s i t (jak zwykle z użyciem jedynki trygonometrycznej) dostajemy równanie powierzchni (które dla uniknięcia konfliktu oznaczeń lepiej nie jest oznaczać przez F)

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Stąd dostajemy pole wektorów normalnych

$$\tilde{N}(x, y, z) = (\text{grad}(G))(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

Podstawiając parametryzację (1) i normując mamy wektory normalne wzdłuż krzywej

$$N(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \cos(t) \\ \sqrt{2}/2 \sin(t) \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Teraz już nie będziemy mieć tyle szczęścia, co w zadaniu 3 i samo obliczenie $\ddot{c}(t)$ nie wystarczy. Musimy zróżniczkować unormowane pole wektorów stycznych

$$v(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{t \sin(t) - \cos(t)}{\sqrt{t^2 + 2}} \\ \frac{t \cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{t^2 + 2}} \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}} \end{pmatrix}$$

wzdłuż krzywej. Otrzymujemy

$$\dot{v}(t) = - \begin{pmatrix} \frac{t^3 \cos(t) + t^2 \sin(t) + 3t \cos(t) + 4 \sin(t)}{(t^2 + 2)^{3/2}} \\ \frac{t^3 \sin(t) - t^2 \cos(t) + 3t \sin(t) - 4 \cos(t)}{(t^2 + 2)^{3/2}} \\ \frac{t}{(t^2 + 2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Wektory $\dot{v}(t)$ grają rolę $\ddot{c}(t)$ w definicji 11.1 w skrypcie. Trick w tym zadaniu polega na tym, że nie trzeba liczyć parametryzacji naturalnej, żeby to wyliczyć. Ostatecznie otrzymujemy

$$\kappa_{nor}(t) = \langle \dot{v}(t), N(t) \rangle = -\frac{t\sqrt{2}}{2\sqrt{t^2 + 2}}.$$

Zadanie 5 (10P):

Oblicz pole wycinka powierzchni zadanej parametryzacją

$$F : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \ni (t, s) \rightarrow \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ s \sin(t) \\ 2 \cdot s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ograniczonego płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$.

W tym zadaniu mamy do czynienia ze stożkiem, ale uwaga, ten stożek ma równanie

$$F(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2.$$

Zatem wycinek S , o którym mowa w zadaniu jest sparametryzowany przez $(t, s) \in U = [0, 2\pi) \times [0, 1/2]$. Obliczamy

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix},$$

skąd natychmiast otrzymujemy macierz pierwszej formy fundamentalnej

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Podstawiając do wzoru (9) w skrypcie, otrzymujemy

$$A[S] = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} s \, ds \, dt = \frac{\sqrt{5}}{4} \pi.$$

Najczęstszym błędem było powielenie z egzaminu przykładowego zakresu od 0 do 1 dla s . Ze względu na masowość nie odejmowałem za to punktów.

Zadanie 6 (10P):

Wyznacz punkty paraboliczne na powierzchni z parametryzacją

$$F : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \ni (t, s) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 \cos(t) \\ \frac{1}{6}s^3 \sin(t) \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

To zadanie było i rachunkowe, i na myślenie. Zostawienie punktu $s = 0$ w dziedzinie było moim niedopatrzeniem, za które przepraszam.

Z zależności

$$W = II_p \cdot I_p^{-1}$$

i odwracalności macierzy pierwszej formy fundamentalnej, natychmiast wynika, że rząd macierzy Weingartena jest dokładnie równy rzędowi macierzy drugiej formy fundamentalnej i w punktach parabolicznych ten rząd jest równy dokładnie 1. Zatem wystarczy badać drugą formę fundamentalną. Co więcej, ponieważ interesuje nas tylko rząd, nie musimy się kłopotać pracowaniem z polem jednostkowych wektorów normalnych przy wyznaczaniu drugiej formy fundamentalnej. Możemy pracować z dowolnym polem, bo to odpowiada mnożeniu macierzy w każdym punkcie przez stałą różną od zera, która nie wpływa na rząd. To kończy część myśleniową zadania.

Rachunki wyglądają następująco. Obliczamy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s^2 \sin(t) \\ \frac{1}{6}s^3 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \begin{pmatrix} s \cos(t) \\ \frac{1}{2}s^2 \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s^2 \cos(t) \\ -\frac{1}{6}s^3 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} = \begin{pmatrix} -s \cos(t) \\ \frac{1}{2}s^2 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ s \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Następnie z polem wektorów normalnych

$$N = 12 \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2s^3 \cos(t) \\ 6s^2 \sin(t) \\ 3s^4 \sin^2(t) - 2s^4 \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

obliczamy współczynniki macierzy proporcjonalnej (w każdym punkcie $F(t, s)$ ten współczynnik proporcjonalności może być inny) do macierzy drugiej formy fundamentalnej:

$$H = \begin{pmatrix} -s^5 & s^4 \sin(t) \cos(t) \\ s^4 \sin(t) \cos(t) & 2s^3(1 + 2\sin^2(t)) \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy to

$$\det(H) = s^8(\cos^4(t) + 3\cos^2(t) - 6).$$

Wyrażenie w nawiasie nigdy nie jest równe zero, bo funkcja cosinus jest ograniczona. Zatem rząd tej macierzy, a więc też macierzy drugiej formy fundamentalnej dla $s \neq 0$ jest maksymalny, czyli na powierzchni nie ma punktów parabolicznych. Punkt odpowiadający $s = 0$ jest osobliwy i jako taki nie podlega w ogóle klasyfikacji z definicji 12.4.