

Geometria Elementarna 2016/17

Zestaw zadań.

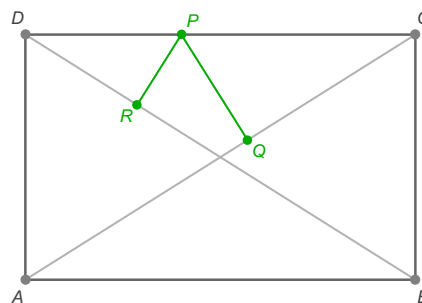
Zadanie 1 Niech l będzie prostą określoną równaniem $Ax + By + C = 0$, ($A^2 + B^2 > 0$). Rozważmy zbiory $H_1, H_2 \subset \pi$ określone następująco:

$$H_1 = \{(x, y) \in \pi : Ax + By + C > 0\} \quad \text{oraz} \quad H_2 = \{(x, y) \in \pi : Ax + By + C < 0\}.$$

Wykazać, że

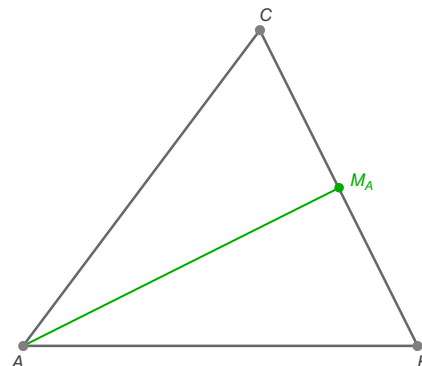
- a) zbiory H_1, H_2 są niepuste, rozłączne i wypukłe¹,
- b) jeśli punkt P nie leży na prostej l , to należy do jednego ze zbiorów H_1, H_2 ,
- c) jeśli $P \in H_1$ i $Q \in H_2$, to odcinek $\overline{PQ}$ przecina prostą l .

Zadanie 2 Niech A, B, C, D będzie prostokątem, a P dowolnym punktem leżącym na jego boku. Wykazać, że suma odległości punktu P od przekątnych prostokąta A, B, C, D nie zależy od położenia punktu P .



Zadanie 3 (twierdzenie Apoloniusza) Niech $\triangle ABC$ będzie dowolnym trójkątem. Wykazać, że jeśli M_A jest środkiem boku BC , to

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM_A|^2 + 2|BM_A|^2.$$

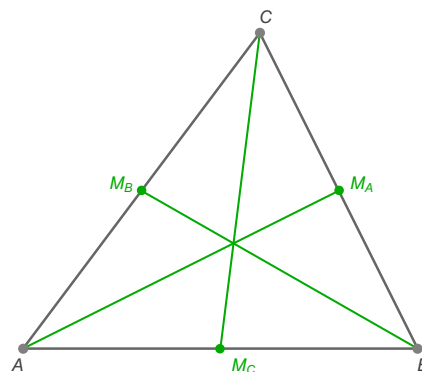


Zadanie 4 (prawo równoległoboku) Wykazać, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$

¹Zbiór $X \subset \pi$ jest *wypukły* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów $P, Q \in X$, odcinek $\overline{PQ}$ zawiera się w zbiorze X .

Zadanie 5 Niech M_A , M_B i M_C będą odpowiednio środkami boków BC , AC i AB trójkąta $\triangle ABC$. Wyrazić długości boków tego trójkąta, znając długości jego środkowych $m_a = |AM_A|$, $m_b = |BM_B|$ i $m_c = |CM_C|$.



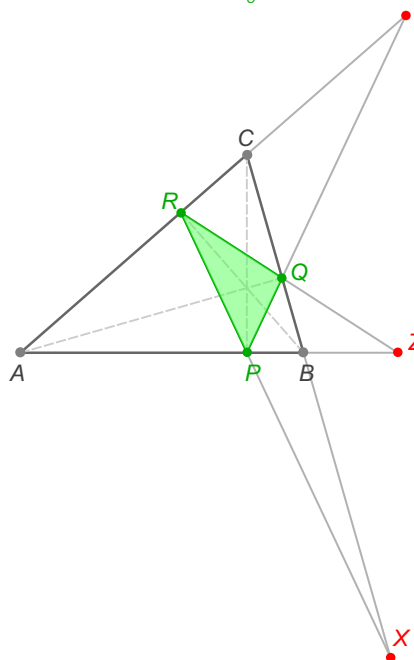
Zadanie 6 Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem ostrokatnym, a punkty P , Q i R spodkami jego wysokości wychodzącymi odpowiednio z wierzchołków C , A i B . Załóżmy, że

$$X = \text{pr } PR \cap \text{pr } BC,$$

$$Y = \text{pr } PQ \cap \text{pr } AC,$$

$$Z = \text{pr } QR \cap \text{pr } AB.$$

Wykazać, że punkty X , Y i Z są współliniowe.



Zadanie 7 Niech P i Q będą dowolnymi punktami płaszczyzny. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów $X \in \mathbb{R}^2$ takich, że

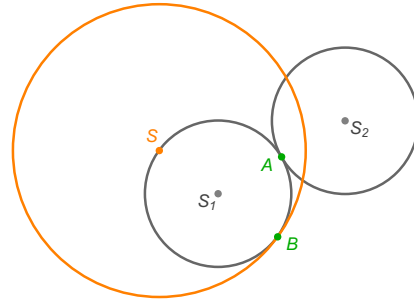
$$\frac{|PX|}{|QX|} = \text{const.}$$

Rozważyć wszystkie przypadki.

Zadanie 8 Niech P i Q będą dwoma różnymi punktami płaszczyzny, leżącymi po jednej stronie danej prostej l . Wskazać na prostej l punkt R taki, że obwód trójkąta $\triangle PQR$ jest najmniejszy.

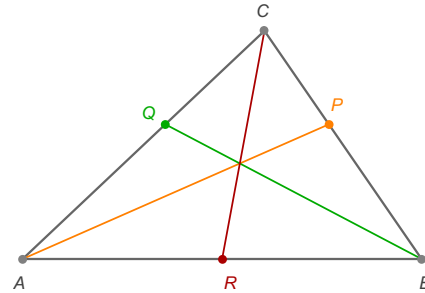
Zadanie 9 Podaj współrzędne punktu $P = (2, 3)$ w bazie afinicznej wyznaczonej przez punkty $A = (-1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, -3)$.

Zadanie 10 Okręgi jednostkowe O_1 i O_2 , o środkach odpowiednio w punktach S_1 i S_2 , są styczne w punkcie A (patrz rysunek obok). Punkt S należący do okręgu O_1 jest środkiem okręgu o promieniu 2, stycznego do O_1 w punkcie B . Wykazać, że prosta $pr AB$ przechodzi przez punkt przecięcia okręgów $O(S, 2)$ i O_2 .



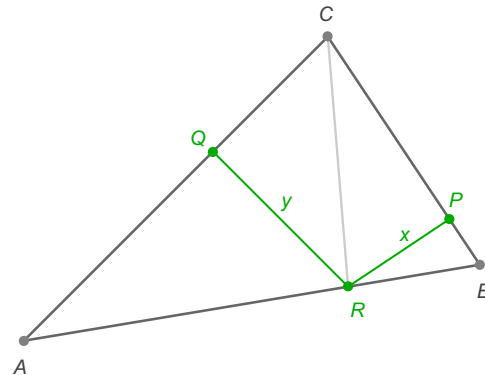
Zadanie 11 W trójkącie $\triangle ABC$, proste $pr AP$, $pr BQ$ i $pr CR$ są odpowiednio symedianą, dwusieczną kąta wewnętrznego i środkową (rysunek obok). Wykazać, że proste te są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b^2 = a \cdot c.$$



Zadanie 12 Punkt R leży na boku AB trójkąta $\triangle ABC$, a x i y są odległościami R odpowiednio od prostych $pr BC$ i $pr AC$. Wykazać, że jeśli prosta $pr CR$ jest symedianą trójkąta $\triangle ABC$, to

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$



Zadanie 13 Uzasadnij, że przekształcenie zadane wzorem

$$f((x, y)) = (y + 1, 3 - x)$$

jest izometria. Rozstrzygnij czy jest to izometria parzysta, czy nieparzysta.

Zadanie 14 Dany jest trójkąt ABC . Punkty P, Q, R są środkami boków AB, BC i CA odpowiednio. Wskaż środek jednokładności odwzorowującej trójkąt ABC na trójkąt PQR i podaj jej skalę. Czy istnieją inne przekształcenia afiniczne odwzorowujące trójkąt ABC na trójkąt PQR ?

Zadanie 15 Podaj równanie obrazu okręgu o środku w punkcie $S = (3, 4)$ i promieniu długości 5 w jednokładności o środku w początku układu współrzędnych i skali $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 16 Wyznaczyć odwzorowanie afiniczne f , które przekształca:

a) trójkąt o wierzchołkach $(2i, 3i, -1 + 3i)$ na trójkąt o wierzchołkach $(0, 1 + i, 2i)$.

b) okrąg $o_1 : x^2 + y^2 - 9 = 0$ na okrąg $o_2 : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

Podać postać macierzową tych odwzorowań.

Zadanie 17 Wiedząc, że $A = (3, -4)$, $B = (1, 1)$ oraz $C = (0, 0)$, wskazać wszystkie izometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, takie, że $A, B \in \text{Fix}(f)$. Wyznaczyć obraz punktu C dla każdego z tych przekształceń.