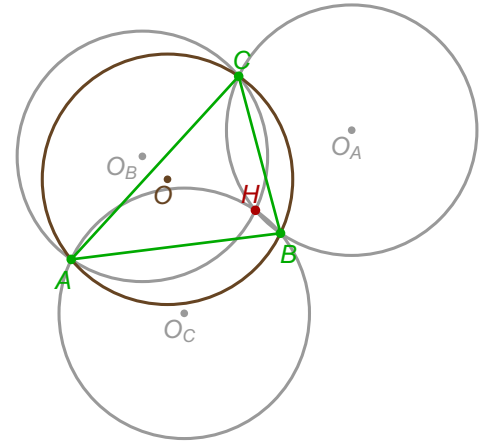


Geometria Elementarna 2016/17

Zestaw ćwiczeń 11, na dzień 9 stycznia 2017r.

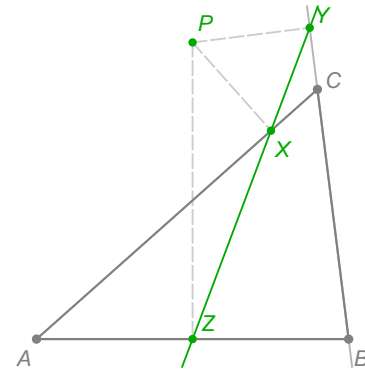
Zadanie 53 Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem ostrokątnym, a punkt H jego ortocentrum (rys. 1). Wykazać, że:

- obrazy punktu H w symetriach osiowych $S_{pr AB}$, $S_{pr AC}$ i $S_{pr BC}$ leżą na okręgu opisanym na $\triangle ABC$,
- okręgi $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ i $\mathcal{O}_C$ opisane odpowiednio na trójkątach $\triangle HBC$, $\triangle HAC$ i $\triangle HAB$ są przystające do okręgu $\mathcal{O}$ opisanego na $\triangle ABC$,
- trójkąt $\triangle O_A O_B O_C$, gdzie O_A , O_B i O_C są odpowiednio środkami okręgów $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ i $\mathcal{O}_C$, jest przystający do trójkąta $\triangle ABC$ oraz środek okręgu $\mathcal{O}$ jest ortocentrum trójkąta $\triangle O_A O_B O_C$.

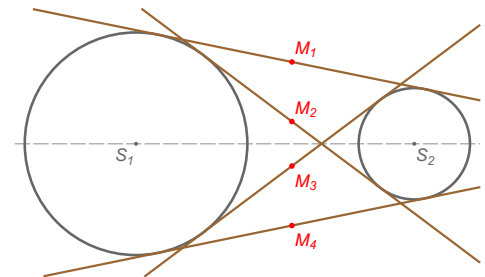


Rysunek 1

Zadanie 54 Punkty X , Y i Z są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste $pr AC$, $pr BC$ i $pr AB$. Wykazać, że P leży na okręgu opisanym na trójkącie $\triangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty X , Y i Z leżą na jednej prostej (*prosta Simsona*).



Zadanie 55 Dane są dwa okręgi $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ rozłączne zewnętrznie. Punkty M_1 , M_2 , M_3 i M_4 są odpowiednio środkami odcinków zawartych we wspólnych stycznych tych okręgów, a ich końcami są punktami styczności (jak na rysunku obok). Wykazać, że punkty M_1 , M_2 , M_3 i M_4 są współliniowe.



Zadanie 56 Niech z_1 , z_2 , z_3 i z_4 będą parami różnymi liczbami zespolonymi, z których żadne trzy nie są współliniowe. Wykazać, że punkty z_1 , z_2 , z_3 i z_4 są współokręgowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich dwustosunek

$$DS(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

jest liczbą rzeczywistą.

Zadanie 57 Niech $O(S, r)$ będzie dowolnym okręgiem. Wyznaczyć obraz trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg $O(S, r)$ względem inwersji $I_{S, r}$. Sporządzić rysunek.

Zadanie 58 Dany jest okrąg $O(S, r)$ oraz jego dwie prostopadłe średnice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Proste l_1, l_2 przecinają się w pewnym punkcie okręgu $O(S, r)$ oraz przechodzą odpowiednio przez punkty A i B . Niech

$$P = l_1 \cap \text{pr } CD \quad \text{ i } \quad P' = l_2 \cap \text{pr } CD.$$

Wykazać, że $P' = I_{S, r}(P)$.

